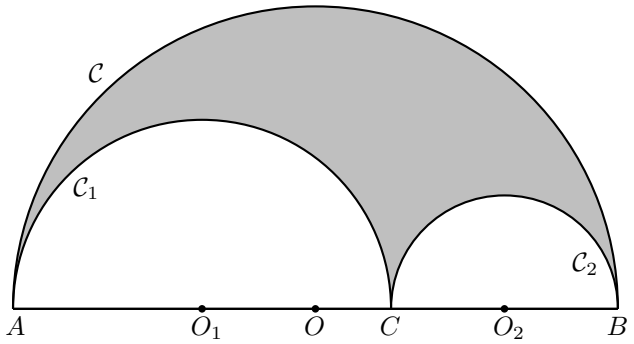
Une étude de l'arbelos

Baptiste GORIN

I. Présentation et premières propriétés de l'arbelos

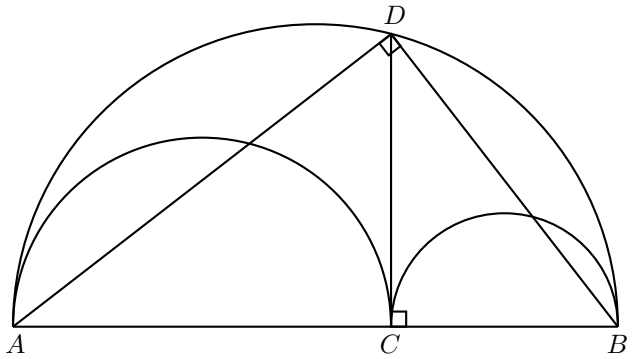
Soient A, B deux points du plan et C un point du segment $[AB]$.
Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}$ les demi-cercles situés dans le même demi-plan délimité par la droite (AB) et de diamètres respectifs $[AC], [CB]$ et $[AB]$. On note O_1, O_2 et O leurs centres, a, b et $a+b$ leurs rayons respectifs.
L'arbelos [1] est la partie du plan bornée par les demi-cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.



Dans la suite de cette note, on supposera $a \geqslant b$.

Propriété I.1. — *Soit D le point d'intersection du demi-cercle $\mathcal{C}$ avec la perpendiculaire à (AB) passant par C. On a :*

$$AC = 2a \qquad BC = 2b \qquad AD = 2\sqrt{a(a+b)} \qquad BD = 2\sqrt{b(a+b)} \qquad CD = 2\sqrt{ab}$$



Démonstration
Il est clair que $AC = 2a$ et $BC = 2b$.
Les triangles ACD et DCB rectangles en C étant semblables, on a : $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BC}{CD}$.
Soit : $CD^2 = AC \times BC = 4ab$.
D'où : $CD = 2\sqrt{ab}$.
Par application du théorème de Pythagore au triangle ACD rectangle en C, on a :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 4a^2 + 4ab = 4a(a+b)$$

d'où : $AD = 2\sqrt{a(a+b)}$.
De même, par application du théorème de Pythagore au triangle BCD rectangle en C, on a :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 4b^2 + 4ab = 4b(a+b)$$

d'où : $BD = 2\sqrt{b(a+b)}$.

C.Q.F.D.

1. Cette dénomination, due à Archimède, signifie littéralement en grec « tranchet de cordonnier »(certains ouvrages anglo-saxons emploient le terme « shoemaker's knife »).

Propriété I.2 (Aire). — *L'aire de l'arbelos est égale à $\mathcal{A} = \pi ab$.*

Démonstration

On a : $\mathcal{A} = \dfrac{\pi(a+b)^2}{2} - \dfrac{\pi a^2}{2} - \dfrac{\pi b^2}{2} = \pi ab.$

C.Q.F.D.

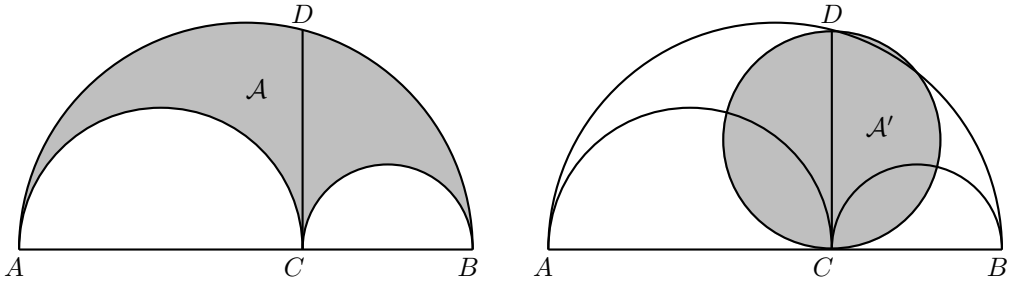
Proposition I.3. — *Le disque de diamètre $[CD]$ a la même aire que l'arbelos.*

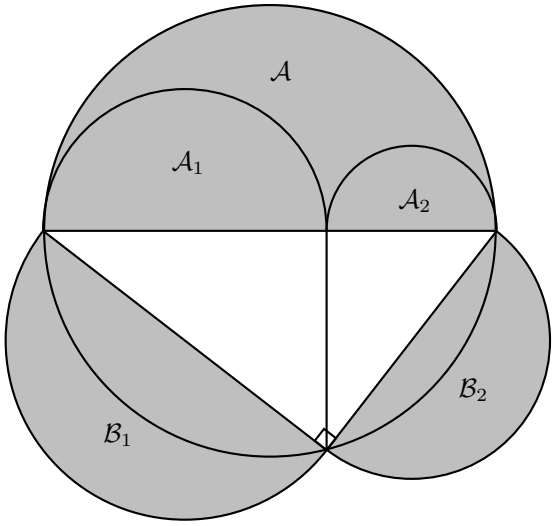
Démonstration

Méthode 1. — Par un calcul direct, l'aire du disque de diamètre $[CD]$ est égale à :

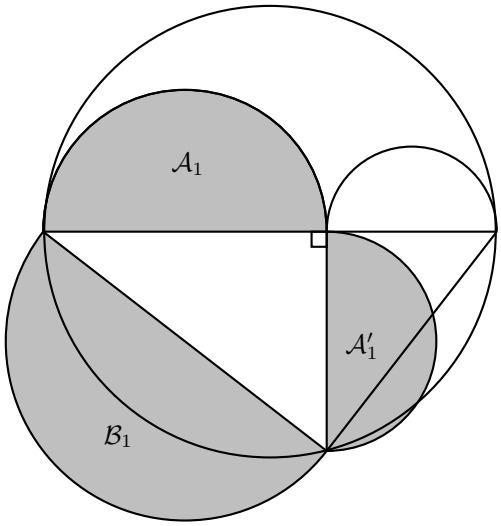
$$\pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \pi ab = \mathcal{A}$$

Méthode 2. — « Visuellement », on a :

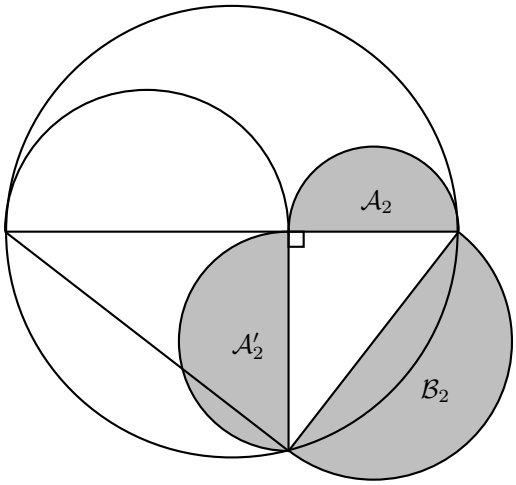




$\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$



$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1$

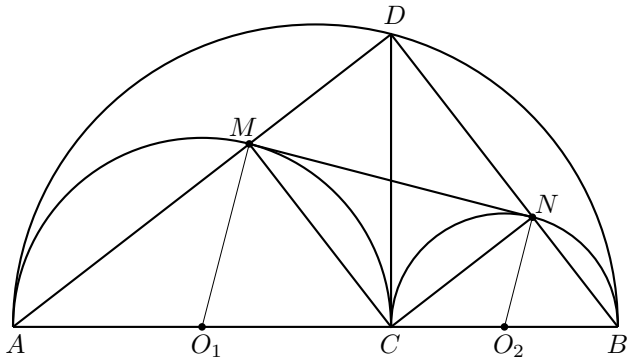


$\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2$

Donc : $\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2$.
Soit : $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}'$.

C.Q.F.D.

Proposition I.4. — *Soient M et N les points d'intersection des segments $[AD]$ et $[BD]$ avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement. Alors :*
- *le quadrilatère $MCND$ est un rectangle*
- *la droite (MN) est tangente à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*



Démonstration
Les angles $\widehat{AMC}, \widehat{CNB}$ et $\widehat{ADB}$ sont droits ; ayant trois angles droits, le quadrilatère $MCND$ est donc un rectangle.
Soit I le point d'intersection des diagonales du rectangle. Les triangles MO_1C et CIM étant isocèles en O_1 et I respectivement, on a :

$$\widehat{O_1MC} = \widehat{MCO_1} \quad \text{et} \quad \widehat{CMI} = \widehat{ICM}$$

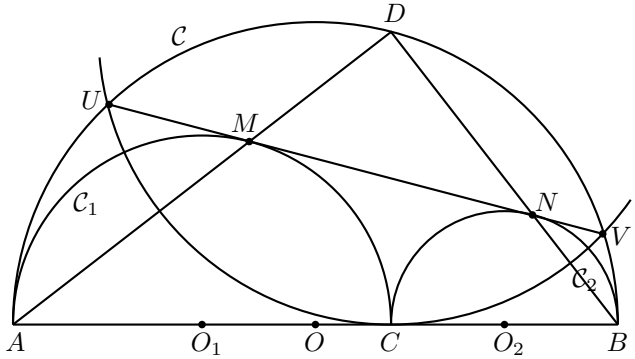
Il vient :

$$\widehat{O_1MI} = \widehat{O_1MC} + \widehat{CMI} = \widehat{MCO_1} + \widehat{ICM} = \widehat{ICO_1} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi la droite (MN) est tangente à $\mathcal{C}_1$ en M.
On prouverait de même que (MN) est tangente à $\mathcal{C}_2$ en N.

C.Q.F.D.

Proposition I.5. — *Soit $[UV]$ la corde de $\mathcal{C}$ portant $[MN]$. Alors U et V appartiennent au cercle de centre D passant par C.*



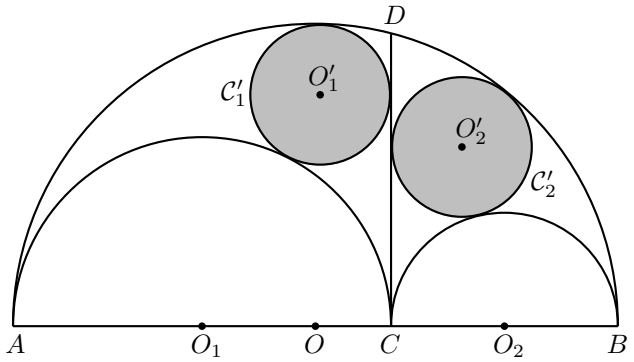
Démonstration
Soit i l'inversion de pôle D et de puissance CD^2.
Comme $DM \times DA = DC^2$ et $DN \times DB = DC^2$, M et N sont les inverses respectifs de A et B par i. On en déduit que la droite (MN) est l'inverse du cercle $\mathcal{C}$.
Les points U et V appartiennent à $\mathcal{C}$ et (MN), ils sont donc invariants par i ; d'où : $DU = DV = DC$.

C.Q.F.D.

II. Cercles d'Archimède

II.1 Cercles jumeaux d'Archimède

Proposition II.1. — *Soient $\mathcal{C}'_1$ le cercle tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ et (CD), $\mathcal{C}'_2$ le cercle tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}_2$ et (CD).*
Les cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ ont le même rayon R avec $R = \dfrac{ab}{a+b}$.



Démonstration
Soient O'_1 le centre du cercle $\mathcal{C}'_1$, H_1 son projeté orthogonal sur la droite (AB) et R le rayon du cercle $\mathcal{C}'_1$.
Première démonstration. — Par application du théorème de Pythagore aux triangles $O_1H_1O'_1$ et $OH_1O'_1$ rectangles en H_1, on a :

$$O'_1H_1^2 = O'_1O_1^2 - H_1O_1^2 = O'_1O^2 - H_1O^2$$

soit :

$$(a+R)^2 - (a-R)^2 = (a+b-R)^2 - (a-b-R)^2$$

Il vient : $R = \dfrac{ab}{a+b}$.
Deuxième démonstration.— Dans le triangle $O_1H_1O'_1$ rectangle en H_1, on a :

$$\cos\left(\widehat{H_1O_1O'_1}\right) = \frac{O_1H}{O_1O'_1} = \frac{a-R}{a+R}$$

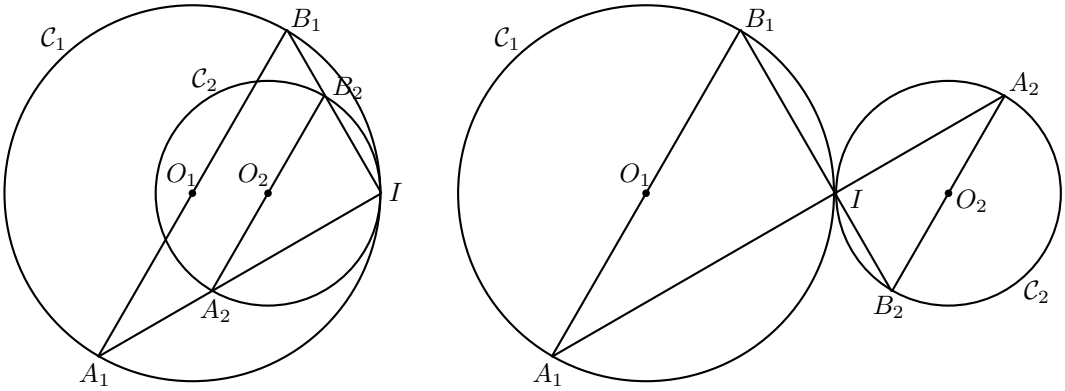
La formule d'Al-Kashi appliqué au triangle $O_1OO'_1$ donne :

$$O'_1O^2 = OO_1^2 + O'_1O_1^2 - 2\cdot OO_1\cdot O'_1O_1\cos\left(\widehat{H_1O_1O'_1}\right)$$

soit :

$$(a+b-R)^2 = b^2 + (a+R)^2 - 2b(a+R)\cdot\frac{a-R}{a+R}$$

Il vient : $R = \dfrac{ab}{a+b}$.
Troisième démonstration. — Commençons par un lemme :
Lemme II.2. — *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2, de diamètres $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ parallèles. On suppose les cercles tangents en en point I.*
Alors les points I, A_1, A_2 et I, B_1, B_2 sont alignés.



Démonstration
Supposons $IO_1 \geqslant IO_2$.
Quitte à considérer le symétrique de l'un des deux cercles par rapport à I, on peut également supposer $\mathcal{C}_2$ tangent intérieurement à $\mathcal{C}_1$.
Soit $J \in (A_1B_1)$ tel que (A_2J) et (O_1O_2) sont parallèles. Le quadrilatère $O_1JA_2O_2$ est donc un parallélogramme.
On a : $O_1J = O_2A_2 = O_2I$.

Par ailleurs, $O_1A_1 = O_1I$.
Ainsi : $JA_1 = O_1A_1 - O_1J = O_1I - O_2I = O_1O_2 = IJ$.
Donc les triangles JA_1A_2 et O_2A_2I sont isocèles en J et O_2 respectivement. Leurs angles au sommet ayant même mesure, il en est de même de leurs angles à la base :

$$\widehat{A_2A_1J} = \widehat{IA_2O_2}$$

Les angles alternes-internes $\widehat{A_1JA_2}$ et $\widehat{O_2A_2J}$ ayant la même mesure, il vient :

$$\widehat{IA_2A_1} = \widehat{IA_2O_2} + \widehat{O_2A_2A_1} = \widehat{A_2A_1J} + \widehat{O_2A_2A_1} = \pi$$

Finalement, les points I, A_1 et A_2 sont alignés.
On prouverait de même l'alignement de I, B_1 et B_2.

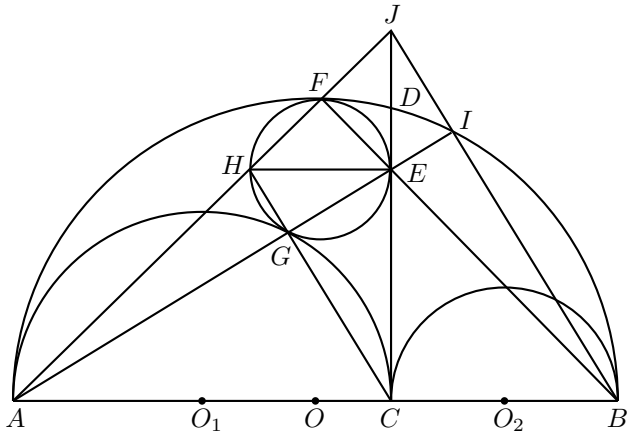
C.Q.F.D.

Soient E, F et G les points de tangence de $\mathcal{C}_1'$ avec $(CD), \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ respectivement.
Soit $H \in \mathcal{C}_1'$ tel que $[EH]$ soit un diamètre de $\mathcal{C}_1'$. Notons que (EH) et (AB) sont parallèles.
D'après le lemme II.2, on a l'alignement des triplets de points suivants :

$$(A, F, H) \quad (B, E, F) \quad (A, E, G) \quad (C, G, H)$$

On considère les points d'intersection suivants :

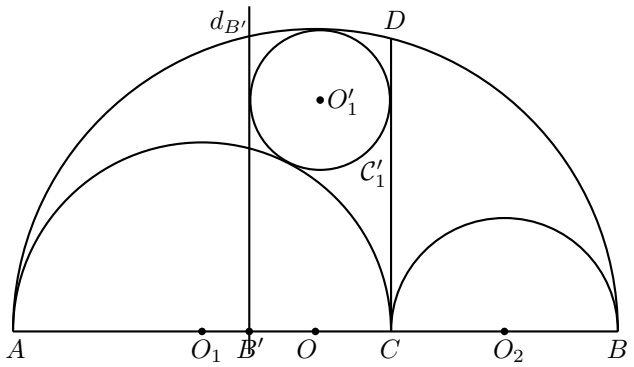
$$I = (AE) \cap \mathcal{C} \qquad J = (AF) \cap (CD)$$



E est l'orthocentre du triangle ABJ de sorte que les droites (AE) et (BJ) sont perpendiculaires.
Par ailleurs, comme les droites (AE) et (BI) sont perpendiculaires, on en déduit l'alignement des points B, I et J.
Les droites (CH) et (BJ) étant parallèles, on a, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AJ}{HJ} = \frac{AC}{EH}$$

Donc : $EH = \dfrac{AC \times BC}{AB} = \dfrac{2ab}{a+b}$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}_1'$ est égal à $\dfrac{EH}{2} = R$.
Quatrième démonstration. — Soient i l'inversion de pôle A et de puissance AC^2, B' l'inverse de B.
L'inverse de $\mathcal{C}_1$ est la perpendiculaire à (AB) passant par C, autrement dit (CD) ; l'inverse de $\mathcal{C}$ est la perpendiculaire $d_{B'}$ à (AB) passant par B'.



Ainsi, l'inverse $i(\mathcal{C}'_1)$ de $\mathcal{C}'_1$ est le cercle tangent à $\mathcal{C}_1, (CD)$ et d, donc a pour rayon $\dfrac{CB'}{2}$.
Or, on a :

$$CB' = AC^2 \cdot \frac{CB}{AC \times AB} = (2a)^2 \cdot \frac{2b}{2a \times 2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Ainsi $i(\mathcal{C}'_1)$ a pour rayon R.
Notons O'_{1i} le centre de $i(\mathcal{C}'_1)$ et $H_{O'_{1i}}$ son projeté orthogonal sur (AB). La puissance de A par rapport au cercle $i(\mathcal{C}'_1)$ est égale à :

$$\begin{aligned} O'_{1i}A^2 - R^2 &= AH^2_{O'_{1i}} + O'_{1i}H^2_{O'_{1i}} - R^2 \\ &= AH^2_{O'_{1i}} + O'_{1i}O_1^2 - O_1H^2_{O'_{1i}} - R^2 \\ &= (2a-R)^2 + (a-R)^2 - (a-R)^2 - R^2 \\ &= 4a^2 \\ &= AC^2 \end{aligned}$$

On en déduit que le cercle $i(\mathcal{C}'_1)$ est invariant par i : $\mathcal{C}'_1 = i(\mathcal{C}'_1)$ a donc pour rayon R.
Cette expression de R étant symétrique en a et b, on en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_2$ a également pour rayon R.

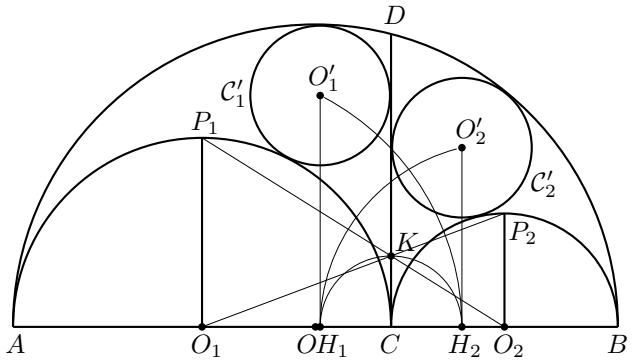
C.Q.F.D.

Construction des cercles jumeaux

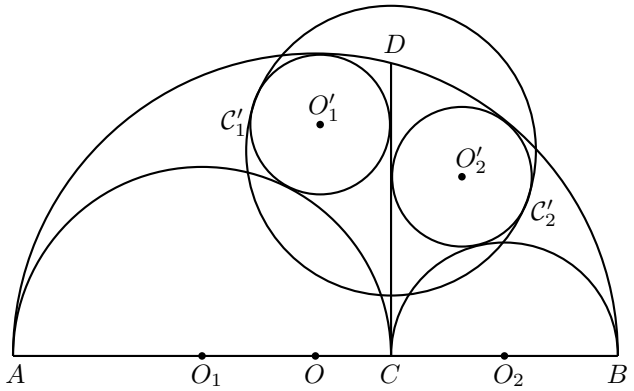
Soit P_1 (resp. P_2) le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) avec la perpendiculaire à (AB) passant par O_1 (resp. O_2).

Le point d'intersection K des droites (O_1P_2) et (O_2P_1) vérifie $CK = \dfrac{ab}{a+b}$ d'après le théorème de Thalès.

Soient $H_1 \in [OO_1]$ et $H_2 \in [OO_2]$ les points d'intersection du cercle de centre C passant par K avec la droite (AB).
Alors O'_1 (resp. O'_2) est le point d'intersection du cercle de centre O_1 (resp. O_2) passant par H_2 (resp. H_1) et de la perpendiculaire à (AB) passant par H_1 (resp. H_2).



Proposition II.3. — *Le plus petit cercle contenant les cercles jumeaux a un diamètre égal à* $2\sqrt{ab}$.



Démonstration

En reprenant la démonstration de la proposition II.1, la distance de O'_1 (resp. O'_2) à (AB) est égale à $2a\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$ (resp. $2b\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$).

Donc, par application du théorème de Pythagore, on a :

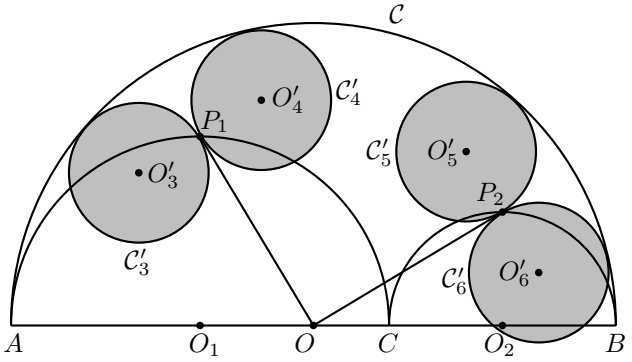
$$\begin{aligned}
O_1'O_2' &= \sqrt{(2R)^2 + \left(2a\sqrt{\frac{b}{a+b}} - 2b\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} + 4\frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})^2}{a+b}} \\
&= \sqrt{4ab\left(\frac{ab}{(a+b)^2} - 2\frac{\sqrt{ab}}{a+b} + 1\right)} \\
&= \sqrt{4ab\left(1 - \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)^2} \\
&= 2\sqrt{ab}\left(1 - \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)
\end{aligned}$$

Le diamètre du plus petit cercle contenant $\mathcal{C}_1'$ et $\mathcal{C}_2'$ est alors égal à $O_1'O_2' + 2R = 2\sqrt{ab}$.

C.Q.F.D.

II.2 D'autres cercles d'Archimède

Proposition (Cercles de Franck Power - 1998) II.4. — *Soient $\mathcal{C}_3'$ et $\mathcal{C}_4'$ (resp. $\mathcal{C}_5'$ et $\mathcal{C}_6'$) les cercles tangents à (OP_1) en P_1 (resp. à (OP_2) en P_2) et à $\mathcal{C}$.*
Les cercles $\mathcal{C}_3', \mathcal{C}_4', \mathcal{C}_5'$ et $\mathcal{C}_6'$ ont le même rayon égal à R.



Démonstration
Soient H_3 la projection orthogonale du centre O_3' du cercle $\mathcal{C}_3'$ et ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}_3'$.
Par application du théorème de Pythagore aux triangles OP_1O_3' et OP_1O_1 rectangles en P_1 et O_1, on a :

$$O_3'O^2 = O_3'P_1^2 + P_1O^2 = O_3'P_1^2 + P_1O_1^2 + OO_1^2$$

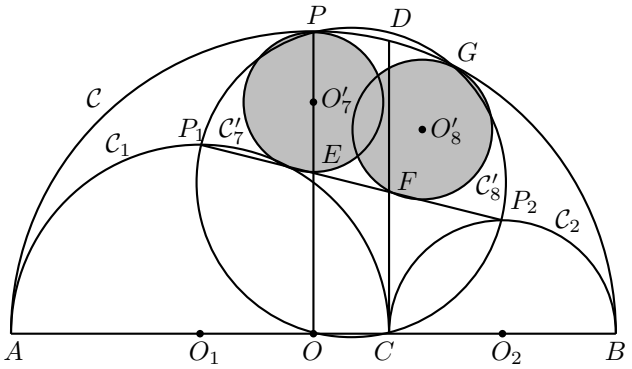
soit :

$$(a + b - \rho)^2 = \rho^2 + a^2 + b^2$$

Il vient $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.
Le calcul est analogue pour les cercles $\mathcal{C}_4', \mathcal{C}_5', \mathcal{C}_6'$ et conduit au même résultat.

C.Q.F.D.

Proposition II.5. — *Soient P le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la perpendiculaire à (AB) passant par O, E et F les points d'intersection de (P_1P_2) avec (OP) et (CD) respectivement.*
Soient $\mathcal{C}_7'$ le cercle de diamètre $[EP]$ et $\mathcal{C}_8'$ le plus petit cercle passant par F et tangent à $\mathcal{C}$ en G.
Les cercles $\mathcal{C}_7'$ et $\mathcal{C}_8'$ ont le même rayon égal à R.
Par ailleurs, les points P, P_1, P_2, O, C et G sont cocycliques.



Démonstration
Calculons l'aire du trapèze $O_1O_2P_2P_1$ de deux manières :

$$\mathcal{A}(O_1O_2P_2P_1) = \mathcal{A}(O_1OEP_1) + \mathcal{A}(OO_2P_2E)$$

soit :

$$\begin{aligned} O_1O_2 \times \frac{O_1P_1 + O_2P_2}{2} &= O_1O \times \frac{O_1P_1 + OE}{2} + OO_2 \times \frac{OE + O_2P_2}{2} \\ \frac{(a+b)^2}{2} &= \frac{b}{2}(OE + a) + \frac{a}{2}(OE + b) \end{aligned}$$

D'où : $OE = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.
Il vient : $EP = OP - OE = a + b - \dfrac{a^2+b^2}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}'_7$ est égal à $\dfrac{EP}{2} = R$.
Calculons de nouveau l'aire du trapèze $O_1O_2P_2P_1$ de deux manières :

$$\mathcal{A}(O_1O_2P_2P_1) = \mathcal{A}(O_1CFP_1) + \mathcal{A}(CO_2P_2F)$$

soit :

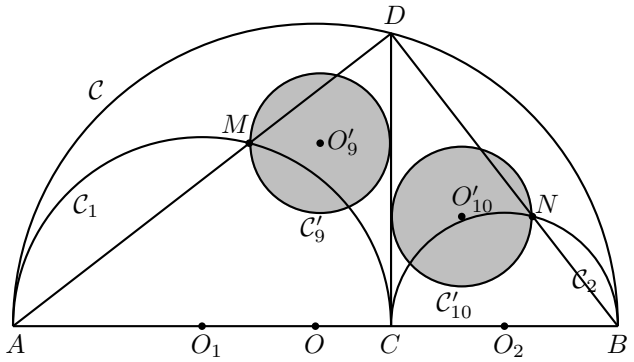
$$\begin{aligned} O_1O_2 \times \frac{O_1P_1 + O_2P_2}{2} &= O_1C \times \frac{O_1P_1 + CF}{2} + CO_2 \times \frac{CF + O_2P_2}{2} \\ \frac{(a+b)^2}{2} &= \frac{a}{2}(CF + a) + \frac{b}{2}(CF + b) \end{aligned}$$

D'où : $CF = \dfrac{2ab}{a+b}$.
Par application du théorème de Pythagore au triangle OCF rectangle en C, on a :

$$OF^2 = OC^2 + CF^2 = (a-b)^2 + \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2$$

D'où : $OF = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.
Il vient : $FG = OG - OF = a + b - \dfrac{a^2+b^2}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}'_8$ est égal à $\dfrac{FG}{2} = R$.
Montrons enfin que les points P, P_1, P_2, O, C et G sont cocycliques.
Le triangle COP étant rectangle en O, les points O, C et P appartiennent au cercle de diamètre $[CP]$.
Par application du théorème de Pythagore au triangle OCP rectangle en O, on obtient : $CP = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.
Notons J le centre du cercle.
Point d'intersection des médiatrices de $[OP]$ et $[OC]$, J est le milieu du segment $[EF]$ car $\dfrac{OE + CF}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.
Par ailleurs, J est également le milieu du segment $[P_1P_2]$; comme $P_1P_2 = \sqrt{2(a^2+b^2)}$ (par application du théorème de Pythagore), il s'ensuit que P_1 et P_2 appartiennent aussi au cercle.
Enfin, considérons la symétrie d'axe (OJ). E ayant pour image F par $s_{(OJ)}$, la droite (OP) a pour image (OF).
Par suite, comme $OP = OG$, la corde $[OP]$ a pour image la corde $[OG]$; autrement dit, G appartient au cercle.
C.Q.F.D.

Proposition II.6. — *Soient $\mathcal{C}'_9$ et $\mathcal{C}'_{10}$ les plus petits cercles tangents à (CD) et passant par M et N respectivement.*
Les cercles $\mathcal{C}'_9$ et $\mathcal{C}'_{10}$ ont le même rayon égal à R.



Démonstration
On a : $AD \times CM = CA \times CD$, d'où :

$$CM = \frac{CA \times CD}{AD} = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

Par application du théorème de Pythagore au triangle MCD rectangle en M, on a :

$$DM^2 = CD^2 - CM^2 = 4ab - \frac{4a^2b}{a+b} = \frac{4ab^2}{a+b}$$

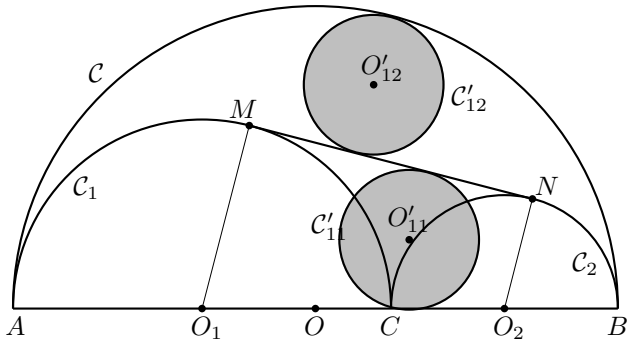
d'où : $DM = \dfrac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$.
En notant H_M la projection orthogonale de M sur (CD), on a, par application du théorème de Thalès :

$$\frac{MH_M}{AC} = \frac{DM}{DA}$$

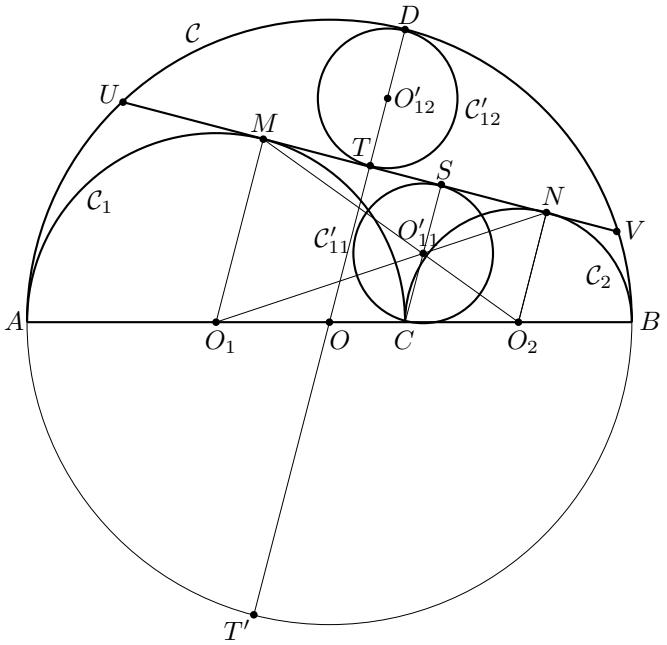
Donc : $MH_M = \dfrac{AC \times DM}{AD} = \dfrac{2ab}{a+b} = 2R$.
On en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_9$ a pour rayon $\dfrac{MH_M}{2} = R$.
L'expression de R étant symétrique en a et b, on en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_{10}$ a également pour rayon R.

C.Q.F.D.

Proposition II.7. — *Soient $\mathcal{C}'_{11}$ le plus petit cercle passant par C et tangent à (MN), et $\mathcal{C}'_{12}$ le plus grand cercle tangent à (MN) et $\mathcal{C}$.*
Les cercles $\mathcal{C}'_{11}$ et $\mathcal{C}'_{12}$ ont le même rayon égal à R.



Démonstration
Soit O'_{11} le point d'intersection des droites (MO_2) et (NO_1).



Comme $MO_1 = a$, $NO_2 = b$ et $\dfrac{CO_1}{CO_2} = \dfrac{a}{b}$, on en déduit que les droites $(MO_1), (NO_2)$ et (CO'_{11}) sont parallèles. En particulier, les droites (CO'_{11}) et (MN) sont perpendiculaires. Notons S leur point d'intersection.

Le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{11}$ est donc CO'_{11} qui est égal à $R = \dfrac{ab}{a+b}$ d'après le théorème de Thalès.

D'après la proposition I.5, le cercle $\mathcal{C}'_{12}$ est tangent à $\mathcal{C}$ en D puisque D est le milieu de l'arc défini par les points U et V.

Soit T le milieu du segment $[UV]$. O'_{12} est clairement le milieu du segment $[TD]$.

Première démonstration. — O et C étant symétriques par rapport au milieu du segment $[O_1O_2]$, on a :

$$OT + CS = MO_1 + NO_2 = a + b$$

d'où

$$TD = OD - OT = OD + CS - (a+b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Par suite, le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{10}$ est égal à $\dfrac{CT}{2} = \dfrac{ab}{a+b} = R$.

Deuxième démonstration. — Soient T' le symétrique de D par rapport à O et i l'inversion de pôle D et de puissance $DT \times DT'$. T' est donc l'inverse de T.

L'inverse de $\mathcal{C}'_{12}$ est la perpendiculaire à (DT) passant par T', autrement dit la tangente à $\mathcal{C}$ en T' ; l'inverse de $\mathcal{C}$ est la perpendiculaire à (DT) passant par T, autrement dit la droite (UV).

Les points U et V appartiennent à $\mathcal{C}$ et à (UV), ils sont donc invariants par i. Ainsi :

$$DT \times DT' = DU^2$$

Comme $DU = DC$ (proposition I.5), il vient :

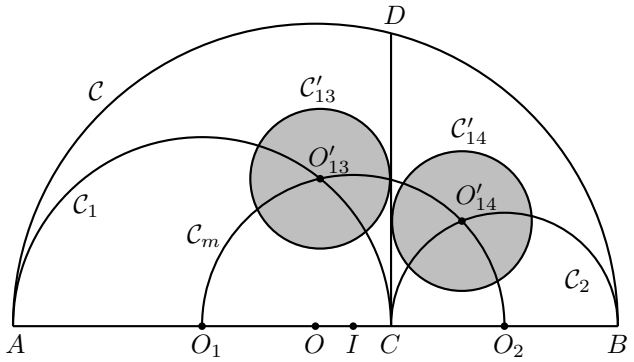
$$DT = \frac{DC^2}{DT'} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

On en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_{12}$ a pour rayon $\dfrac{DT}{2} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.8. — *Soient $\mathcal{C}_m$ le demi-cercle de diamètre $[O_1O_2]$, O'_{13} le point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_1$, O'_{14} celui de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_2$.*

Les cercles $\mathcal{C}'_{13}$ et $\mathcal{C}'_{14}$ centrés en O'_{13} et O'_{14} respectivement et tangents à (CD) ont le même rayon égal à R.



Démonstration
Soient I le milieu du segment $[O_1O_2]$, H_{13} la projection orthogonale de O'_{13} sur (AB) et ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{13}$.
Par application du théorème de Pythagore aux triangles $O_1H_{13}O'_{13}$ et $IH_{13}O'_{13}$ rectangles en H_{13}, on a :

$$O'_{13}H_{13}^2 = O'_{13}O_1^2 - H_{13}O_1^2 = O'_{13}I^2 - H_{13}I^2$$

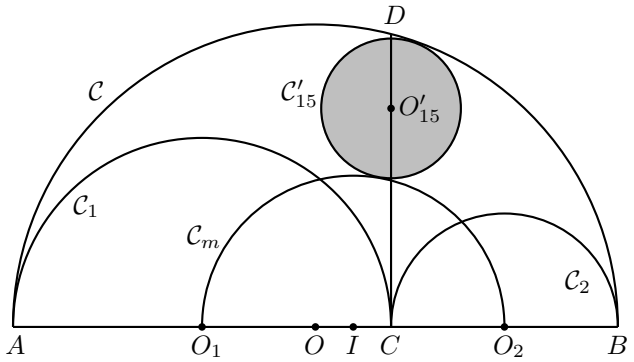
soit :

$$a^2 - (a-\rho)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\rho - \frac{a-b}{2}\right)^2$$

Il vient : $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.
L'expression de R étant symétrique en a et b, on en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_{14}$ a également pour rayon R.

C.Q.F.D.

Proposition II.9. — *Le cercle $\mathcal{C}'_{15}$ tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_m$ et dont le centre O'_{15} appartient au segment $[CD]$ a un rayon égal à R.*



Démonstration
Soit ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{15}$.
Par application du théorème de Pythagore aux triangles OCO'_{15} et ICO'_{15} rectangles en C, on a :

$$O'_{15}C^2 = O'_{15}O^2 - CO^2 = O'_{15}I^2 - CI^2$$

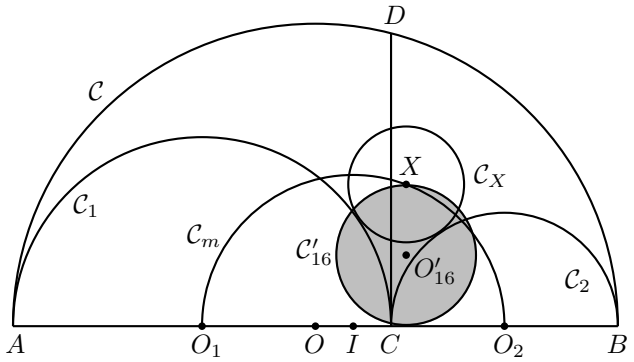
soit :

$$(a+b-\rho)^2 - (a-b)^2 = \left(\frac{a+b}{2} + \rho\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Il vient $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.10. — *Soit $\mathcal{C}_X$ le cercle tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et dont le centre X appartient à $\mathcal{C}_m$.*
Le plus petit cercle $\mathcal{C}'_{16}$ passant par X et tangent à (AB) a un rayon égal à R.



Démonstration
Soit r_X le rayon du cercle $\mathcal{C}_X$.
Par application du théorème de Pythagore au triangle XO_1O_2 rectangle en X, on a :

$$O_1O_2^2 = O_1X^2 + O_2X^2$$

soit :

$$(a+b)^2 = (a+r_X)^2 + (b+r_X)^2$$

Par suite, r_X est la solution positive de l'équation : $x^2 + (a+b)x - ab = 0$, d'où :

$$r_X = \frac{\sqrt{a^2+6ab+b^2} - (a+b)}{2}$$

Soit H_X la projection orthogonale de X sur (AB).
En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles O_1H_XX et O_2H_XX rectangles en H_X, on a :

$$H_XX^2 = O_1X^2 - O_1H_X^2 = O_2X^2 - O_2H_X^2$$

Comme H_X appartient au segment $[IO_2]$ (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$), il vient :

$$O_1X^2 - (O_1I + IH_X)^2 = O_2X^2 - (O_2I - IH_X)^2$$

soit :

$$IH_X = \frac{O_1X^2 - O_2X^2}{2(O_1I + IO_2)} = \frac{(a+b+2r_X)(a-b)}{2(a+b)}$$

Par application du théorème de Pythagore au triangle IH_XX rectangle en H_X, on a :

$$H_XX^2 = IX^2 - IH_X^2$$

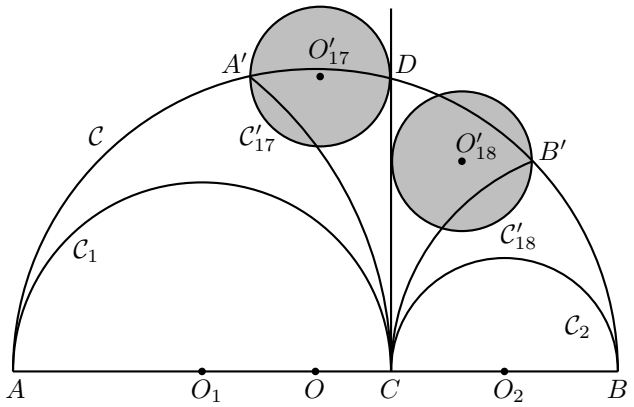
soit :

$$H_XX^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a+b+2r_X)(a-b)}{2(a+b)}\right)^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

donc : $H_XX = \dfrac{2ab}{a+b} = 2R$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{14}$ est égal à $\dfrac{H_XX}{2} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.11. — *Soient A' et B' les points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec les cercles $\mathcal{C}(A, 2a)$ et $\mathcal{C}(B, 2b)$ respectivement. Soient $\mathcal{C}'_{17}$ et $\mathcal{C}'_{18}$ les plus petits cercles passant par A' et B' respectivement et tangents à (CD). Les cercles $\mathcal{C}'_{17}$ et $\mathcal{C}'_{18}$ ont le même rayon égal à R*



Démonstration
Soit $H_{A'}$ le projeté orthogonal de A' sur la droite (AB). Notons ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{17}$.
Par application du théorème de Pythagore aux triangles $AH_{A'}A'$ et $OH_{A'}A'$ rectangles en $H_{A'}$, on a :

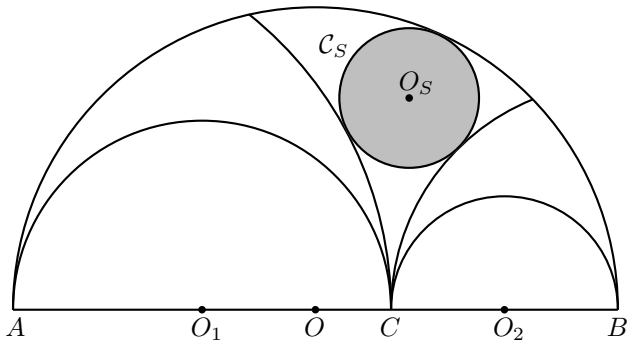
$$A'H_{A'}^2 = AA'^2 - AH_{A'}^2 = OA'^2 - OH_{A'}^2$$

soit :

$$(4a)^2 - (2a - 2\rho)^2 = (a+b)^2 - (2\rho - (a-b))^2$$

Il vient alors $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.
L'expression de R étant symétrique en a et b, on en déduit que le cercle $\mathcal{C}'_{18}$ a également pour rayon R.
C.Q.F.D.

Proposition (Cercle de Thomas Schoch - 1978) II.12. — *Le cercle $\mathcal{C}_S$ inscrit au triangle curviligne défini par les cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}(A, 2a)$ et $\mathcal{C}(b, 2b)$ a un rayon égal à R.*



Démonstration
Première démonstration. — Soient O_S le centre du cercle $\mathcal{C}_S$ et ρ son rayon. $[OO_S]$ étant la médiane issue de O_S dans le triangle ABO_S, on a :

$$AO_S^2 + BO_S^2 = 2OO_S^2 + 2OA^2$$

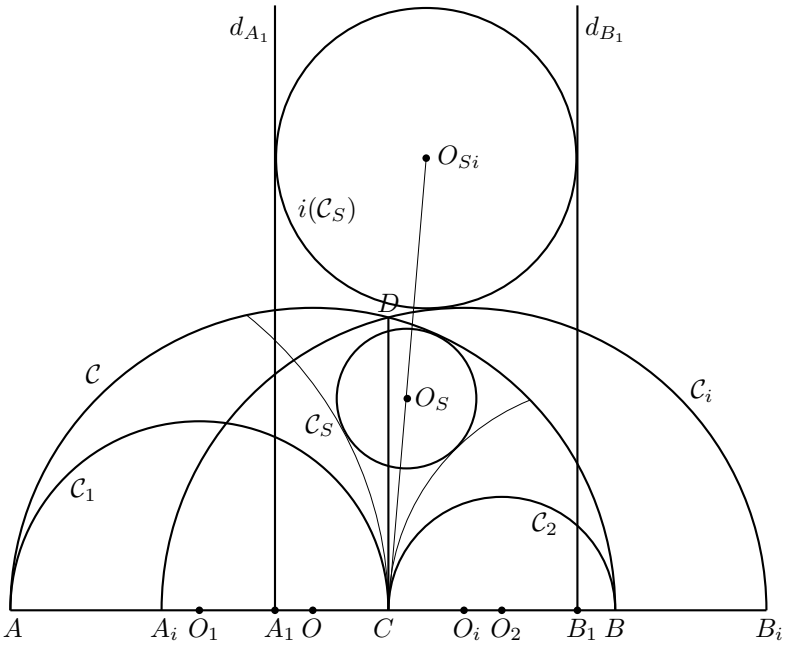
soit :

$$(2a+\rho)^2 + (2b+\rho)^2 = 2(a+b-\rho)^2 + 2(a+b)^2$$

Il vient alors $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.
Deuxième démonstration. — Soit i l'inversion de pôle C et de puissance $CD^2 = 4ab$.
L'inverse du cercle $\mathcal{C}(A, 2a)$ est la perpendiculaire d_{A_1} à (AB) passant par A_1 où $A_1 \in [CA)$ est tel que $CA_1 = \dfrac{CD^2}{2CA} = b$.
De même, l'inverse du cercle $\mathcal{C}(B, 2b)$ est la perpendiculaire d_{B_1} à (AB) passant par B_1 où $B_1 \in [CB)$ est tel que $CB_1 = \dfrac{CD^2}{2CB} = a$.
L'inverse $\mathcal{C}_i$ du cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[A_iB_i]$ où $A_i = i(A)$ et $B_i = i(B)$ vérifient :

$$A_i \in [CA) \qquad CA_i = \frac{CD^2}{CA} = 2b$$
$$B_i \in [CB) \qquad CB_i = \frac{CD^2}{CB} = 2a$$

On en déduit que $\mathcal{C}_i$ est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à C. En particulier, $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}$ ont le même rayon.
Ainsi, $i(\mathcal{C}_S)$ est le cercle tangent à d_{A_1}, d_{B_1} et $\mathcal{C}_i$. Son rayon ρ est égal à $\dfrac{A_1B_1}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.
Notons O_i et O_{Si} les centres de $\mathcal{C}_i$ et $i(\mathcal{C}_S)$ respectivement.



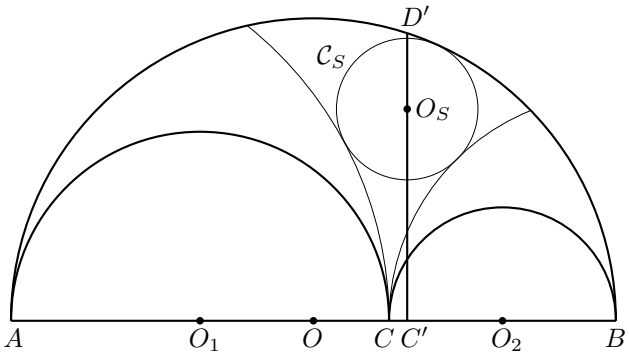
Comme $CA_1 = O_iB_1 = b$, O_{Si} appartient à la médiatrice du segment $[CO_i]$.
On en déduit que C et O_i ont la même puissance μ par rapport au cercle $i(\mathcal{C}_S)$.
Comme $O_{Si}C = O_{Si}O_i = a + b + \rho = \dfrac{3}{2}(a+b)$, il vient :

$$\mu = O_{Si}C^2 - \rho^2 = \left(\frac{3}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 2(a+b)^2$$

Or $\mathcal{C}_S$ est l'image de $i(\mathcal{C}_S)$ par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{CD^2}{\mu}$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}_S$ est égal à $\dfrac{CD^2}{\mu} \cdot \rho = \dfrac{4ab}{2(a+b)^2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{ab}{a+b} = R$.

C.Q.F.D.

Lemme II.13. — *Soient $(C'D')$ la perpendiculaire à (AB) passant par O_S avec $C' \in [AB]$ et $D' \in \mathcal{C}$.*



On a :

$$CC' = R\frac{|a-b|}{a+b} = \frac{ab|a-b|}{(a+b)^2} \qquad C'D' = \frac{\sqrt{ab(2a^2+5ab+b^2)(2b^2+5ab+a^2)}}{(a+b)^2}$$

Démonstration
C' appartient au segment $[CO_2]$ (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$).
Par application du théorème de Pythagore aux triangles AO_SC' et OO_SC' rectangles en C', on a :

$$C'O_S^2 = O_SA^2 - C'A^2 = O_SO^2 - C'O^2$$

soit :

$$(2a+R)^2 - (2a+CC')^2 = (a+b-R)^2 - (a-b+CC')^2$$

Comme $R = \dfrac{ab}{a+b}$, il vient : $CC' = \dfrac{ab(a-b)}{(a+b)^2} = R\dfrac{a-b}{a+b}$.

En supposant $a \leqslant b$, un calcul analogue conduirait à $CC' = \dfrac{ab(b-a)}{(a+b)^2} = R\dfrac{b-a}{a+b}$.

Ainsi : $CC' = R\dfrac{|a-b|}{a+b} = \dfrac{ab|a-b|}{(a+b)^2}$.

Supposons toujours $a \geqslant b$. Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $OC'D'$, on a :

$$C'D'^2 = D'O^2 - C'O^2 = D'O^2 + (OC + CC')^2$$

soit :

$$C'D'^2 = (a+b)^2 - \left(a - b + \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2}\right)^2 = \frac{ab(2a^2+5ab+b^2)(2b^2+5ab+a^2)}{(a+b)^4}$$

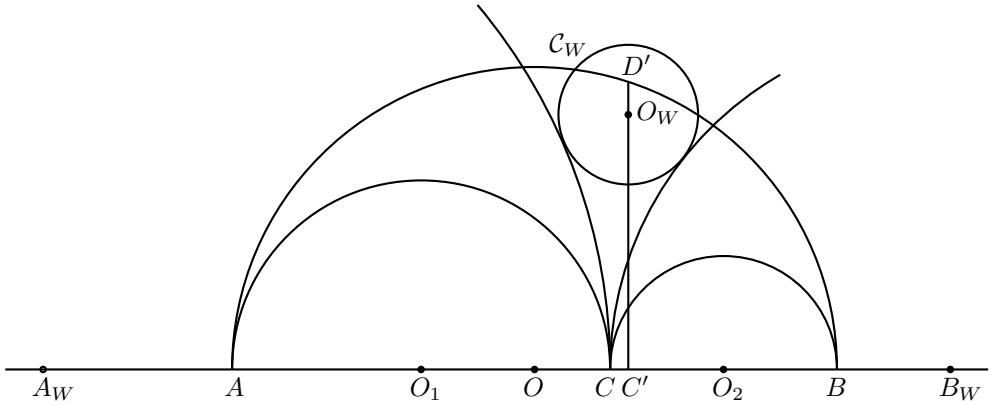
D'où : $C'D' = \dfrac{\sqrt{ab(2a^2+5ab+b^2)(2b^2+5ab+a^2)}}{(a+b)^2}$.

Cette expression étant symétrique en a et b, on aboutirait au même résultat en supposant $a \leqslant b$.

C.Q.F.D.

Définition II.14. — *La droite $(C'D')$ est appelée ligne de Schoch ; on la note $\mathcal{L}_S$.*

Proposition (Cercles de Peter Woo) II.15. — *Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, $A_W \in [CA)$ et $B_W \in [CB)$ tels que $A_WC = ka$ et $B_WC = kb$.*
Le cercle $\mathcal{C}_W$ tangent à $\mathcal{C}(A_W, ka)$ et $\mathcal{C}(B_W, kb)$ et dont le centre O_W appartient à la ligne de Schoch $\mathcal{L}_S$ a pour rayon R.



Démonstration

Soit ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}_W$. C' est le projeté orthogonal de O_W sur (AB).
Par application du théorème de Pythagore aux triangles $A_WC'O_W$ et $B_WC'O_W$ rectangles en C', on a :

$$C'O_W^2 = A_WO_W^2 - C'A_W^2 = B_WO_W^2 - C'B_W^2$$

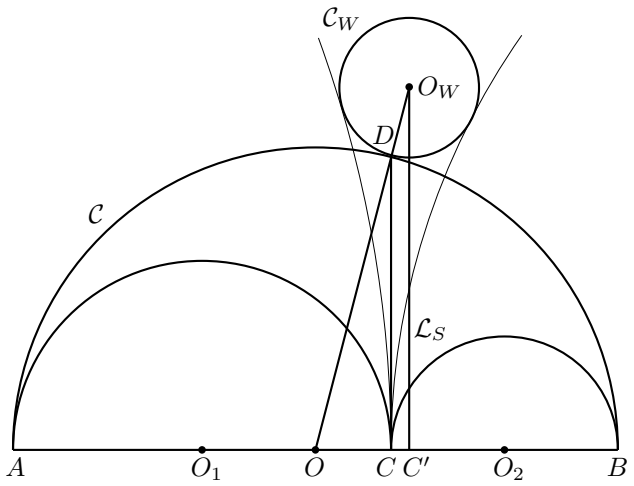
soit (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$) :

$$(ka+\rho)^2 - (ka + CC')^2 = (kb+\rho)^2 - (kb - CC')^2$$

D'où : $\rho = CC'\dfrac{a+b}{a-b} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.16. — *Le cercle de Woo tangent à $\mathcal{C}$ passe par le point D.*



Démonstration
Soient D_1 le point d'intersection de (OO_W) et $\mathcal{C}$, et H_{D_1} sa projection orthogonale sur (AB).
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OD_1}{OO_W} = \frac{OH_{D_1}}{OC'}$$

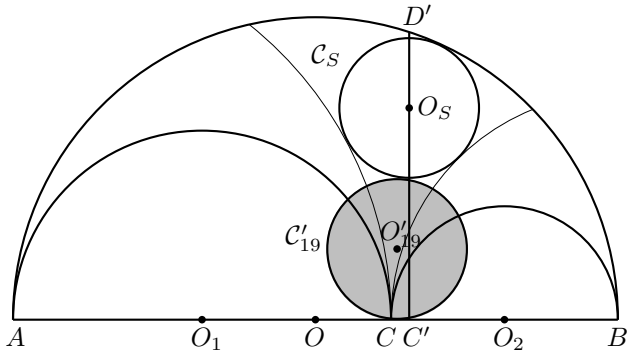
soit (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$) :

$$OH_{D_1} = \frac{OD_1 \times OC'}{OO_W} = \frac{(a+b)\left(a-b+R\dfrac{a-b}{a+b}\right)}{a+b+R} = a-b$$

Ainsi $OH_{D_1} = OC$ de sorte que $D_1 = D$.
Autrement dit, le cercle de Woo est tangent à $\mathcal{C}$ en D.

C.Q.F.D.

Proposition II.17. — *Le plus petit cercle $\mathcal{C}'_{19}$ tangent à $\mathcal{C}_S$ et passant par C a un rayon égal à R.*



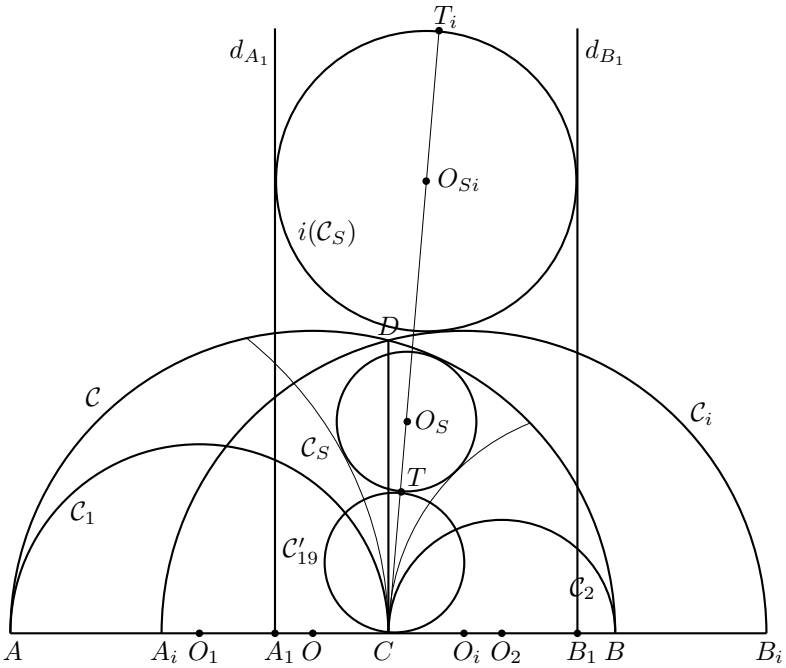
Démonstration
Première démonstration. — Par application du théorème de Pythagore aux triangles $CC'O_S$ et $AC'O_S$ rectangles en C', on a :

$$CO_S^2 = C'C^2 + C'O_S^2 = C'C^2 + O_SA^2 - C'A^2$$

soit (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$) :

$$CO_S^2 = \left(R\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + (2a+R)^2 - \left(2a+R\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

Comme $R = \dfrac{ab}{a+b}$, il vient : $CO_S = 3\dfrac{ab}{a+b} = 3R$.
Il est alors clair que le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{19}$ est égal à R.
Deuxième démonstration. — Reprenons les notations de la deuxième démonstration de la proposition II.11.
Soient T le point de tangence de $\mathcal{C}_S$ et $\mathcal{C}'_{19}$, et T_i son inverse. T_i appartient à l'arc de cercle ne contenant pas les points de tangence de $i(\mathcal{C}_S)$ avec d_{A_1}, d_{B_1} et $\mathcal{C}_i$.



On a :

$$CT_i = CO_{Si} + O_{Si}T_i = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a+b) = 2(a+b)$$

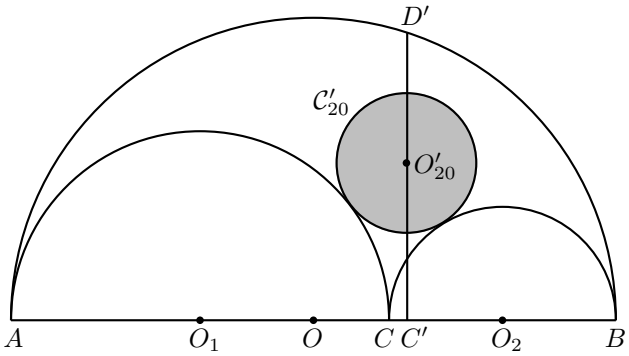
Or $CT \times CT_i = CD^2$, donc :

$$CT = \frac{CD^2}{CT_i} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{19}$ est égal à $\dfrac{CT}{2} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.18. — *Le cercle $\mathcal{C}'_{20}$ tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et dont le centre O'_{20} appartient à la ligne de Schoch $\mathcal{L}_S$ a un rayon égal à R.*



Démonstration
Soit ρ le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{20}$.
Par application du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $O_1C'O'_{20}$ et $O_2C'O'_{20}$, on a :

$$O'_{20}C'^2 = O'_{20}O_1^2 - C'O_1 = O'_{20}O_2^2 - C'O_2^2$$

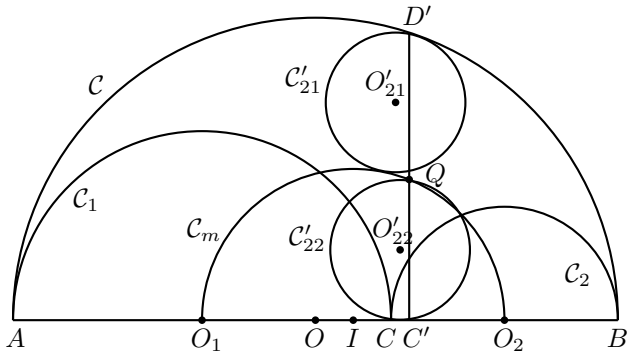
soit (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$) :

$$(a+\rho)^2 - (a+CC')^2 = (b+\rho)^2 - (b-CC')^2$$

Comme $CC' = R\dfrac{a-b}{a+b}$, il vient : $\rho = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.19. — *Soit Q le point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de la ligne de Schoch $\mathcal{L}_S$.*
Soient $\mathcal{C}'_{21}$ le plus petit cercle tangent à $\mathcal{C}_m$ passant par D' et $\mathcal{C}'_{22}$ le cercle circonscrit au triangle $CC'Q$.
Les cercles $\mathcal{C}'_{21}$ et $\mathcal{C}'_{22}$ ont le même rayon égal à R.



Démonstration
Par application du théorème de Pythagore dans le triangle $IC'D'$ rectangle en C', on a :

$$ID'^2 = IC'^2 + D'C'^2 = (IC + CC')^2 + C'D'^2$$

soit (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$) :

$$ID'^2 = \left(\frac{a-b}{2} + \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{ab(2a^2+5ab+b^2)(2b^2+5ab+a^2)}}{(a+b)^2}\right)^2$$

Il vient : $ID' = \dfrac{a^2+6ab+b^2}{2(a+b)}$.
Si ρ désigne le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{21}$, il vient :

$$\rho = \frac{1}{2}\left(ID' - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+6ab+b^2}{2(a+b)} - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{ab}{a+b} = R$$

Par application du théorème de Pythagore dans le triangle $IC'E$ rectangle en C', on a :

$$C'E^2 = IE^2 - IC'^2 = IE^2 - (IC + CC')^2$$

soit :

$$C'E^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} + \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2(3a^2+10ab+3b^2)}{(a+b)^4}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $CC'E$, on a :

$$CE^2 = C'C^2 + C'E^2$$

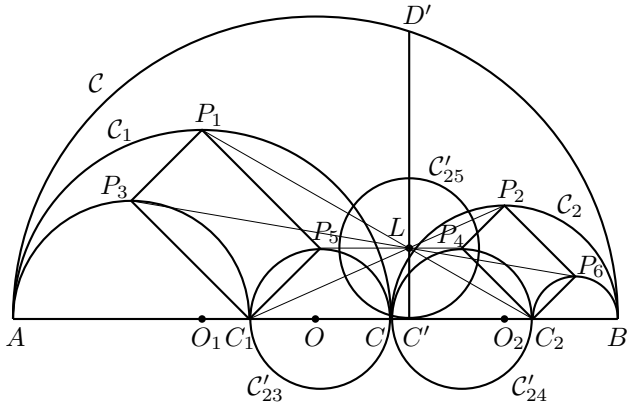
soit :

$$CE^2 = \left(\frac{ab(a-b)}{(a+b)^2}\right)^2 + \frac{a^2b^2(3a^2+10ab+3b^2)}{(a+b)^4} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

Par suite, le rayon du cercle $\mathcal{C}'_{22}$ est égal à $\dfrac{CE}{2} = R$.

C.Q.F.D.

Proposition II.20. — *Considérons deux arbelos construits à partir de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et semblables à l'arbelos de départ.*
Les cercles $\mathcal{C}'_{23}$ et $\mathcal{C}'_{24}$ passant par C des deux arbelos ainsi construits ont le même rayon égal à R.
De plus, les rectangles construits à partir des milieux de chaque arc des arbelos sont semblables dans une homothétie dont le centre L appartient à la ligne de Schoch $\mathcal{L}_S$.
Enfin, le cercle $\mathcal{C}'_{25}$ de centre L passant par C' a pour rayon R.



Démonstration
Les cercles de diamètres $[CC_1]$ et $[CC_2]$ ont clairement pour rayon R.
Le rectangle $P_1P_3C_1P_5$ (resp. $P_2P_4C_2P_6$) a pour dimension $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ et $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ (resp. $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ et $\dfrac{\sqrt{2}b^2}{a+b}$).
Ces deux rectangles sont donc semblables par une similitude de rapport $\dfrac{b}{a}$.
Des considérations de parallélisme montrent que ces deux rectangles sont homothétiques.
Soit L le centre de l'homothétie de rapport $-\dfrac{b}{a}$.
Notons H_L le projeté orthogonal de L sur (AB).
On a :

$$\begin{cases} C_1H_L + H_LO_2 = C_1O_2 = C_1C + CO_2 = \dfrac{2ab}{a+b} + b = \dfrac{b(3a+b)}{a+b} \\ \dfrac{H_LC_1}{H_LO_2} = \dfrac{LC_1}{LP_2} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

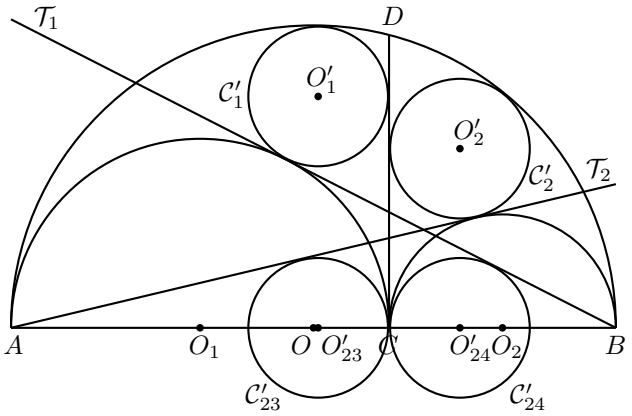
Il vient : $C_1H_L = \dfrac{ab(3a+b)}{(a+b)^2}$.
Donc :

$$CH_L = C_1H_L - CC_1 = \frac{ab(3a+b)}{(a+b)^2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2} = R\frac{a-b}{a+b} = CC'$$

Finalement, $H_L = C'$ de sorte que L appartient à la ligne de Schoch $\mathcal{L}_S$.

C.Q.F.D.

Proposition II.21. — *La droite (CD) est une tangente commune aux cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_{24}$ (resp. $\mathcal{C}'_2$ et $\mathcal{C}'_{23}$). La seconde tangente $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}'_2$) commune à $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_{24}$ (resp. $\mathcal{C}'_2$ et $\mathcal{C}'_{23}$) passe par le point B (resp. par le point A).*



Démonstration
Considérons la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_1$ passant par B. Notons H_{O_1} et $H_{O'_{24}}$ les projetés orthogonaux de O_1 et O'_{24} sur $\mathcal{T}$.
Par application du théorème de Thalès, on a :

$$\frac{O'_{24}H_{O'_{24}}}{O_1H_{O_1}} = \frac{BO'_{24}}{BO_1}$$

d'où :

$$O'_{24}H_{O'_{24}} = \frac{O_1H_{O_1} \times BO'_{24}}{BO_1} = \frac{a(2b-R)}{a+2b} = R$$

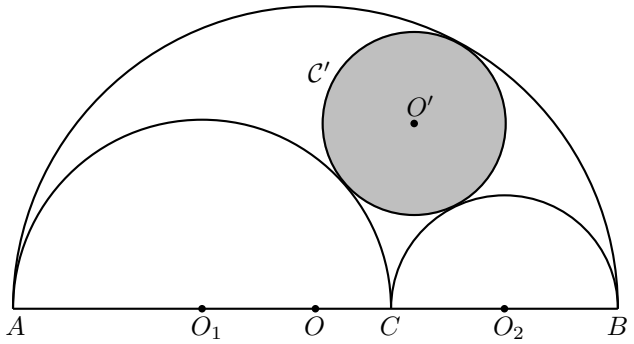
On en déduit que $\mathcal{T}$ est également tangente à $\mathcal{C}'_{24}$ (en $H_{O'_{24}}$).
Soit I le point d'intersection de $\mathcal{T}$ et (CD). On a : $IC = IH_{O_1} = IH_{O'_{24}}$.
Il s'ensuit que le symétrique du cercle $\mathcal{C}'_{24}$ par rapport à I est un cercle de rayon R tangent à $\mathcal{C}_1$ et (CD) ; il s'agit donc de $\mathcal{C}'_1$.
Finalement les tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_1$ sont confondues.
On prouverait de même que $\mathcal{T}_2$ est tangente à $\mathcal{C}_2$ et passe par A.

C.Q.F.D.

III. Cercle inscrit à l'arbelos

Proposition III.1. — *Le cercle $\mathcal{C}'$ inscrit à l'arbelos, tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, a pour rayon r avec*

$$r = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$



Démonstration

Première démonstration. — Soient O' le centre de $\mathcal{C}'$ et $H_{O'}$ sa projection orthogonale sur (AB).
$H_{O'}$ appartient au segment $[OO_2]$ (puisqu'on a supposé $a \geqslant b$).
Par application du théorème de Pythagore aux triangles $OO'H_{O'}, O_1O'H_{O'}$ et $O_2O'H_{O'}$ rectangles en $H_{O'}$, on a :

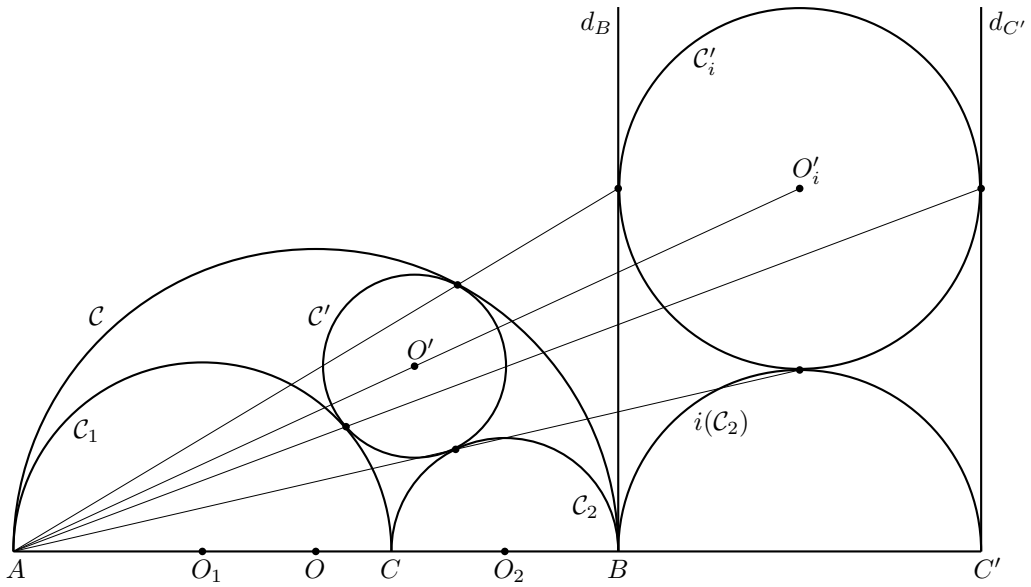
$$\begin{cases} O'O^2 = O'H_{O'}^2 + OH_{O'}^2 \\ O'O_1^2 = O'H_{O'}^2 + O_1H_{O'}^2 \\ O'O_2^2 = O'H_{O'}^2 + O_2H_{O'}^2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} (a+b-r)^2 = O'H_{O'}^2 + OH_{O'}^2 \\ (a+r)^2 = O'H_{O'}^2 + (b+OH_{O'})^2 \\ (b+r)^2 = O'H_{O'}^2 + (a-OH_{O'})^2 \end{cases}$$

D'une part, on a $bOH_{O'} = 2ar - b^2 - ab + br$ d'après les deux premières égalités.
D'autre part, on a $aOH_{O'} = a^2 + ab - ar - 2br$ d'après les première et troisième égalités.
Il vient alors $r = \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

Deuxième démonstration. — Considérons l'inversion i de pôle A et de puissance AB^2. Le point B est invariant par i. Soit C' l'inverse de C par i.
L'inverse de $\mathcal{C}_2$ est le cercle $i(\mathcal{C}_2)$ de diamètre $[BC']$.
L'inverse du cercle $\mathcal{C}_1$ est la perpendiculaire $d_{C'}$ à (AB) passant par C' ; l'inverse du cercle $\mathcal{C}$ est la perpendiculaire d_B à (AB) passant par B.
Par suite, l'inverse $\mathcal{C}_i'$ du cercle $\mathcal{C}'$ est le cercle tangent à $i(\mathcal{C}_2), d_B$ et $d_{C'}$.



On a :

$$BC' = AB^2 \times \frac{BC}{AB \times AC} = (2(a+b))^2 \times \frac{2b}{2(a+b)\cdot 2a} = \frac{2b(a+b)}{a}$$

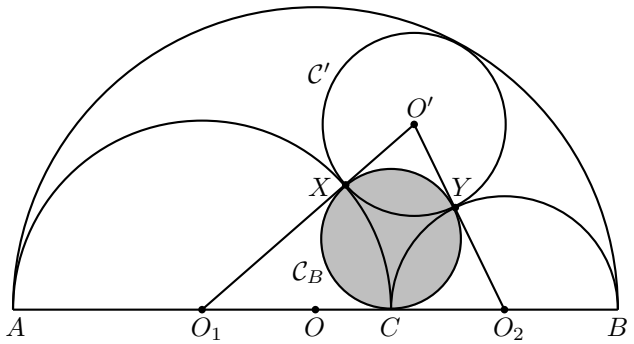
Ainsi, le rayon ρ du cercle $\mathcal{C}'_i$ est égal à $\dfrac{b(a+b)}{a}$.
Soit O'_i le centre du cercle $\mathcal{C}'_i$. La puissance μ de A par rapport au cercle $\mathcal{C}'_i$ est égale à :

$$\mu = O'_iA^2 - \rho^2 = (2(a+b)+\rho)^2 + (2\rho)^2 - \rho^2 = (2a+2b+\rho)^2 + 3\rho^2$$

Or $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}'_i$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{AB^2}{\mu}$.
On en déduit que le rayon r du cercle $\mathcal{C}'$ est égal à $r = \dfrac{AB^2}{\mu}\cdot\rho = \dfrac{4(a+b)^2\rho}{(2a+2b+\rho)^2+3\rho^2} = \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

C.Q.F.D.

Proposition (Cercle de Leon Bankoff - 1950) III.2. — *Si le cercle $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(O', r)$ inscrit à l'arbelos est tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en X et Y respectivement, alors le cercle $\mathcal{C}_B$ circonscrit au triangle CXY a pour rayon R.*



Démonstration
Première démonstration. — Le cercle circonscrit à CXY est clairement le cercle inscrit à O_1O_2O' car

$$O_1C = O_1X = a \qquad O_2C = O_2Y = b \qquad O'X = O'Y = r = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$

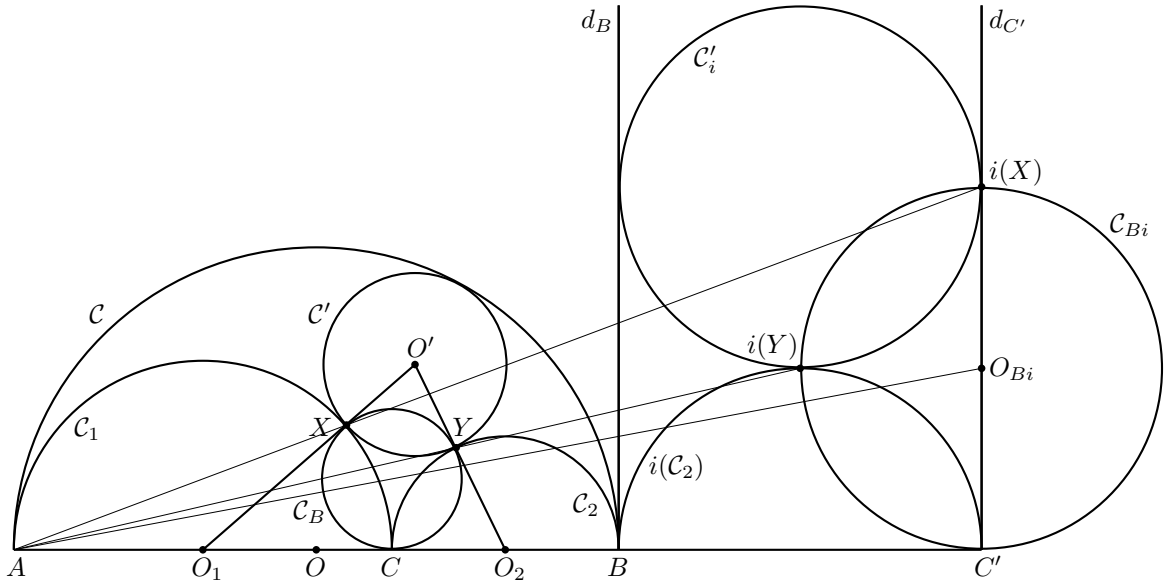
Le demi-périmètre du triangle O_1O_2O' est égal à $a+b+\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{(a+b)^3}{a^2+ab+b^2}$.
La formule de Héron donne :

$$\mathcal{A}(O_1O_2O') = \sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\cdot a\cdot b} = \frac{ab(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$$

Par ailleurs, si ρ désigne le rayon du cercle inscrit à O_1O_2O', on a :

$$\mathcal{A}(O_1O_2O') = \rho\frac{(a+b)^3}{a^2+ab+b^2}$$

Il vient alors $\rho = \dfrac{ab}{a+b} = R$.
Deuxième démonstration. — Reprenons les notations de la deuxième démonstration de la proposition III.1 et considérons l'inversion i de pôle A et de puissance AB^2.



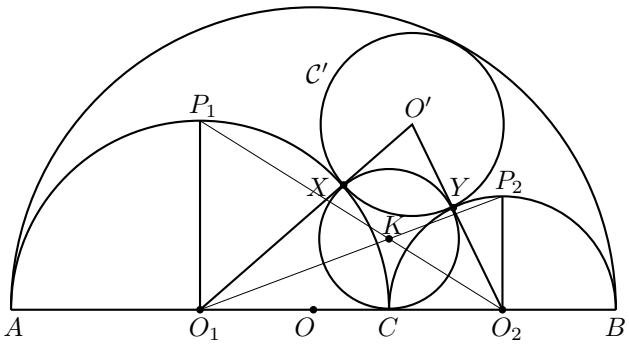
L'inverse $\mathcal{C}_{Bi}$ de $\mathcal{C}_B$ est le cercle passant par les points $C', i(X)$ et $i(Y)$ (ces deux derniers points étant également les points de contact de $\mathcal{C}'_i$ avec $d_{C'}$ et $i(\mathcal{C}_2)$ respectivement). Le rayon de ce cercle est donc égal à $\rho = \dfrac{b(a+b)}{a}$ d'après la deuxième démonstration de la proposition III.1.
Soit O_{Bi} le centre du cercle $\mathcal{C}_{Bi}$. La puissance μ de A par rapport au cercle $\mathcal{C}_{Bi}$ est égale à :

$$\mu = AO_{Bi}^2 - \rho^2 = C'A^2 + C'O_{Bi}^2 - \rho^2 = (2(a+b)+2\rho)^2 + \rho^2 - \rho^2 = 4(a+b+\rho)^2$$

Or $\mathcal{C}_B$ est l'image de $\mathcal{C}_{Bi}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{AB^2}{\mu}$.
On en déduit que le rayon du cercle $\mathcal{C}_B$ est égal à $\dfrac{AB^2}{\mu} \cdot \rho = \dfrac{4(a+b)^2\rho}{4(a+b+\rho)^2} = \dfrac{ab}{a+b} = R$.

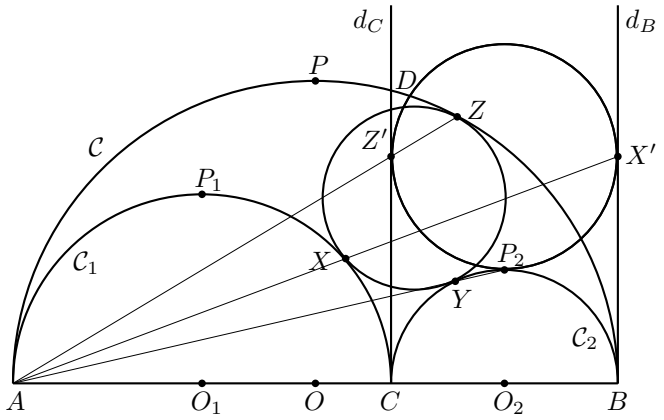
C.Q.F.D.

Première construction du cercle inscrit
Soit P_1 (resp. P_2) le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) avec la perpendiculaire à (AB) passant par O_1 (resp. O_2).
Le point d'intersection K des droites (O_1P_2) et (O_2P_1) vérifie $CK = \dfrac{ab}{a+b}$ d'après le théorème de Thalès.
Le cercle de centre K passant par C coupe les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en X et Y respectivement.
O' est alors le point d'intersection des droites (O_1X) et (O_2Y).



Proposition III.3. — *Soient P_1 et P_2 les points d'intersection des demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ avec les perpendiculaires à (AB) passant par O_1 et O_2 respectivement. Si le cercle inscrit à l'arbelos est tangent aux demi-cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}$ en X, Y et Z respectivement, alors :*
- *les points A, C, Y et Z appartiennent à un cercle de centre P_1*
- *les points B, C, X et Z appartiennent à un cercle de centre P_2.*

Démonstration
Soient d_C et d_B les perpendiculaires à (AB) passant par C et B respectivement. On note P le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par O avec $\mathcal{C}$.

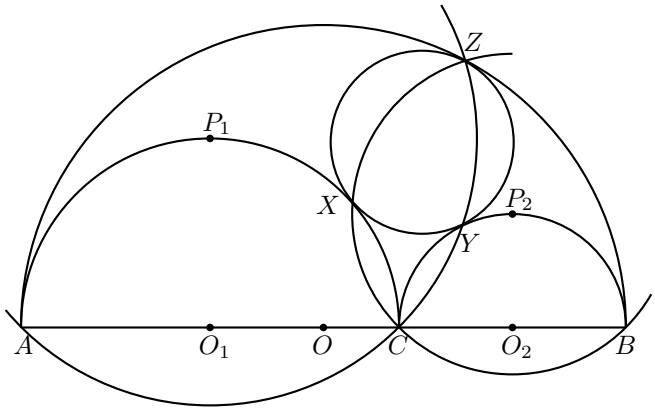


On a $AB \times AC = AD^2$.
Considérons l'inversion i_1 de pôle A et de puissance AD^2. L'inverse de B par i est C et la droite (AB) est invariante par i.
Les demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ ont pour inverses respectifs les demi-droites $[BX')$ et $[CD)$.
Étant orthogonal à la droite (AB) invariante par i_1, le demi-cercle $\mathcal{C}_2$ est également invariant par i_1.
On en déduit que le cercle inscrit à l'arbelos, qui est circonscrit à XYZ, a pour inverse le cercle tangent à d_C, d_B et $\mathcal{C}_2$ en Z', X' et P_2 respectivement.
$\mathcal{C}_2$ étant invariant par i_1, les points A, Y et P_2 sont alignés.
On note que les points B, P_2, Z' et P sont alignés ; ainsi l'inverse de la droite passant par ces points est le cercle passant par C, Y, Z et A. En particulier, le centre de ce cercle appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
De plus, le diamètre passant par A est perpendiculaire à (BP). Il s'ensuit que P_1 est le centre du cercle.
Ainsi, les points Y et Z appartiennent au cercle de centre P_1 passant par A (et C).
Un raisonnement analogue en considérant l'inversion i_2 de pôle B et de puissance BD^2 montre que X et Z appartiennent au cercle de centre P_2 passant par B (et C).

C.Q.F.D.

Remarque III.4. — Les points A, Y et P_2 d'une part, B, X et P_1 d'autre part, sont alignés puisque $i_1(Y) = P_2$ et $i_2(X) = P_1$.

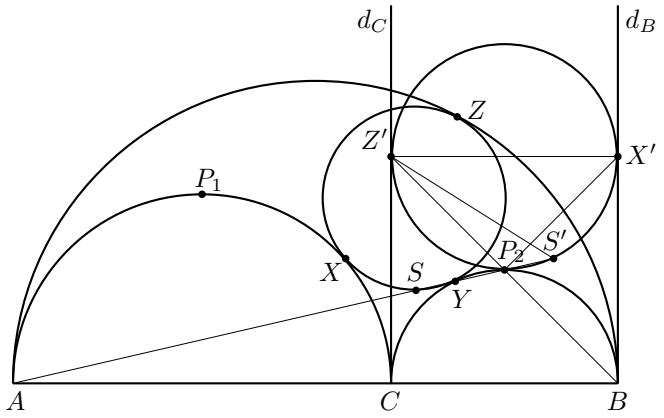
Deuxième construction du cercle inscrit
Avec les notations de la proposition III.3, on a :



Troisième construction du cercle inscrit
La démonstration fournit une autre construction du cercle inscrit. Il est aisé de construire le cercle tangent à d_B, d_C et $\mathcal{C}_2$, qui est circonscrit au triangle $X'Z'P_2$. Les points X, Y et Z sont alors les points d'intersection des droites $(AX'), (AZ')$ et (AP_2) avec $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.

Proposition III.5. — *Avec les notations de la proposition III.3, les droites $(AY), (BX)$ et (CZ) sont concourantes en un point S qui appartient au cercle inscrit à l'arbelos.*

Démonstration
Les points A, Y et P_2, ainsi que B, X et P_1, sont alignés d'après la remarque III.4.
Considérons le point d'intersection S de la droite (AP_2) avec le cercle circonscrit à XYZ.



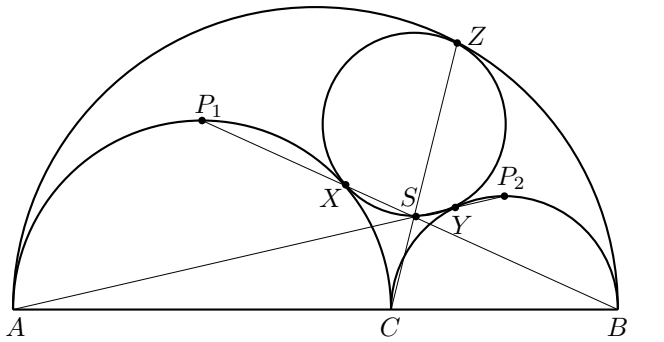
L'inverse S' de S par i_1 appartient à la droite (AS) et au cercle circonscrit à $X'Z'P_2$.
Par ailleurs :

$$\widehat{AS'Z'} = \widehat{P_2S'Z'} = \widehat{P_2X'Z'} = \frac{\pi}{4} = \widehat{ABZ'}$$

de sorte que les points A, Z', S' et B son cocycliques.
En considérant l'inverse par i_1 du cercle auquel ces points appartiennent, on conclut que S appartient à la droite (CZ).
Par un raisonnement analogue en considérant l'inversion i_2, on conclurait que les droites (BX) et (CZ) sont sécantes au même point S.

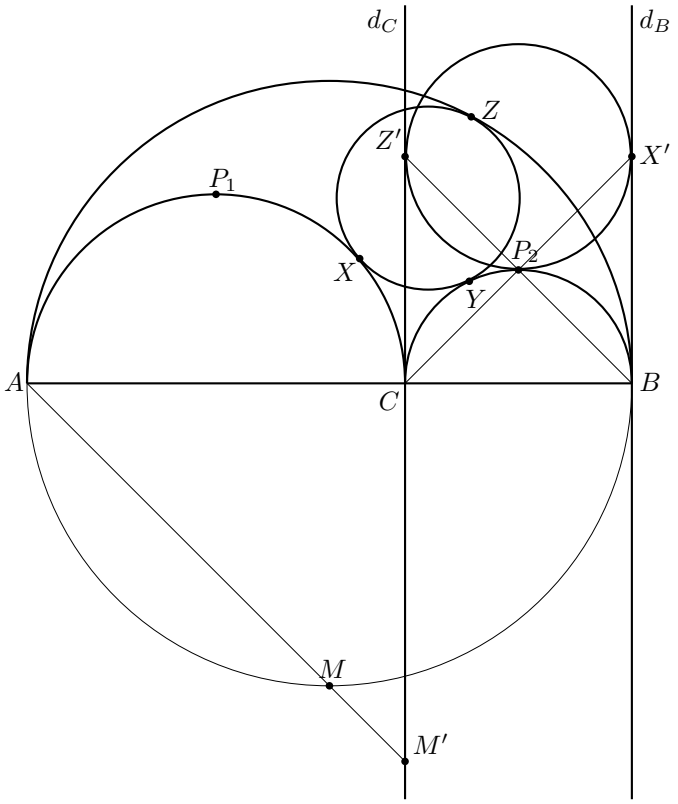
C.Q.F.D.

Quatrième construction du cercle inscrit
Avec les notations de la proposition III.5, on a :



Proposition III.6. — *Avec les notations de la démonstration de la proposition III.3, soit M le symétrique de P par rapport à la droite (AB). Alors :*
- *les points A, X, Y et B appartiennent à un cercle de centre M ;*
- *le point Z appartient à la droite (CM).*

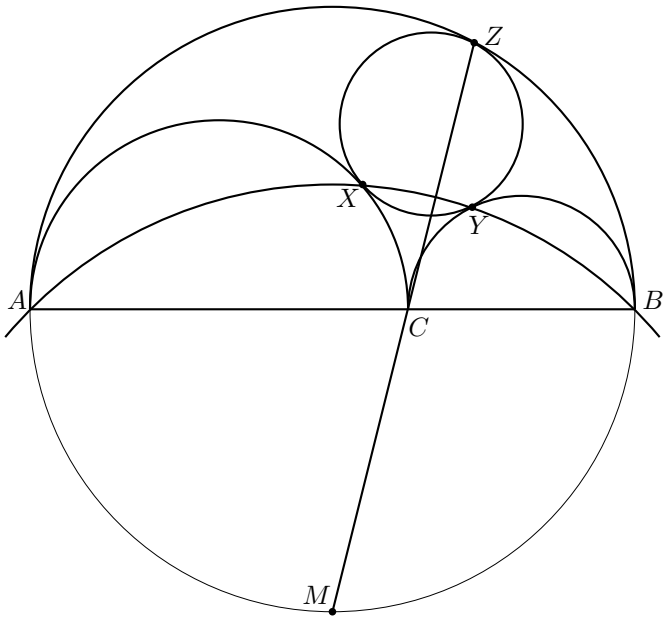
Démonstration
Les points C, P_2 et X' sont alignés. L'inverse par i_1 de la droite (CX') est le cercle passant par A, B, Y et X. En particulier, le centre de ce cercle appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
De plus, le diamètre passant par A est perpendiculaire à (CP_2). Il s'ensuit que M est le centre du cercle.
Ainsi, X, Y appartiennent au cercle de centre passant par A (et B).



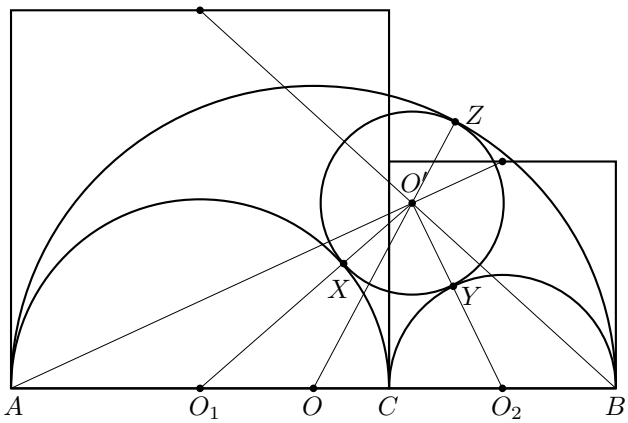
Soit M' le point d'intersection des droites (AM) et d_C. Comme $\widehat{BAM'} = \dfrac{\pi}{4} = \widehat{BZ'M'}$, les points A, B, M' et Z' sont cocycliques. En considérant l'inverse par i_1 du cercle auquel ces points appartiennent, on conclut que M appartient à la droite (CZ).

C.Q.F.D.

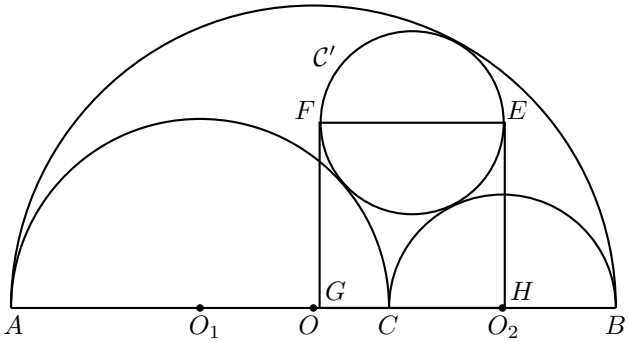
Cinquième construction du cercle inscrit
Avec les notations de la proposition III.6, on a :



Sixième construction du cercle inscrit
Avec les notations précédentes, les cercles circonscrits à XYZ et $X'Z'P_2$ sont inverses l'un de l'autre par i_1 mais également homothétiques par rapport au pôle A.
En particulier, le centre du cercle inscrit appartient à la droite passant par A et le milieu du segment $[X'Z']$ (qui est le côté opposé à $[BC]$ sur le carré construit du même côté que l'arbelos).
On a une propriété analogue avec le carré construit sur le segment $[AC]$.



Proposition (Archimède) III.7. — *Soient $E, F \in \mathcal{C}'$ tels que $[EF]$ est un diamètre de $\mathcal{C}'$ parallèle à la droite (AB). Soient H et G les projetés orthogonaux de E et F respectivement sur (AB).*
Alors les longueurs AG, GH et HB sont en progression géométrique et le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

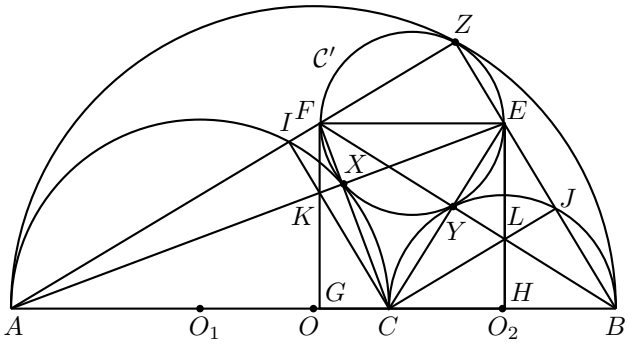


Démonstration
Soient X, Y et Z les points de tangence de $\mathcal{C}'$ avec $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}$ respectivement.
D'après le lemme II.2, on a l'alignement des triplets de points suivants :

$$(A, F, Z) \quad (B, E, Z) \quad (A, X, E) \quad (B, Y, F) \quad (C, X, F) \quad (C, Y, E)$$

On considère les points d'intersection suivants :

$$\begin{array}{ll} I = (AZ) \cap \mathcal{C}_1 & J = (BZ) \cap \mathcal{C}_2 \\ K = (AX) \cap (CI) & L = (BY) \cap (CJ) \\ G = (FK) \cap (AB) & H = (EL) \cap (AB) \end{array}$$



K est l'orthocentre du triangle ACF de sorte que les droites (AB) et (FG) sont perpendiculaires.
De même, en considérant l'orthocentre L du triangle BCE, on en déduit que les droites (EH) et (AB) sont perpendiculaires.
Par ailleurs, les droites (CI) et (BZ) sont parallèles, de même que (CJ) et (AZ). Donc :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AK}{KE} = \frac{AG}{GH} \qquad \text{et} \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{FL}{LB} = \frac{GH}{HB}$$

Ainsi : $\dfrac{AG}{GH} = \dfrac{GH}{HB} = \dfrac{a}{b}$.
Les longueurs AG, GH et HB sont donc en progression géométrique.

On en déduit l'expression du rayon r de $\mathcal{C}'$. En effet, on a :

$$AB = AG + GH + HB = \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right) GH$$

Donc : $r = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{GH}{2} = \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.
Il vient alors :

$$AG = \frac{a}{b}GH = \frac{a^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \qquad \text{et} \qquad BH = \frac{b}{a}GH = \frac{b^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$

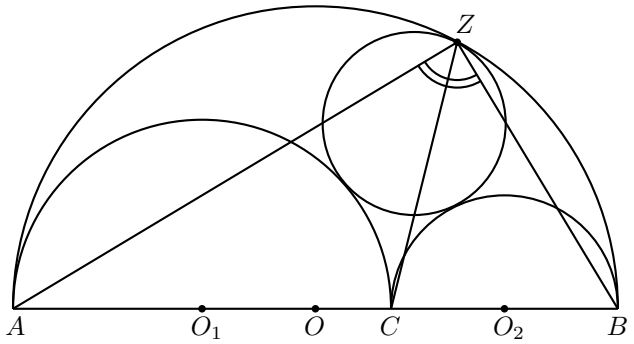
Les triangles rectangles AGF et EHB étant semblables, on a :

$$\frac{FG}{AG} = \frac{BH}{EH}$$

soit : $FG^2 = AG \times BH = \dfrac{a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+ab+b^2)^2}$.
Par suite : $EF = FG = \dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.
Ainsi $EFGH$ est un carré.

C.Q.F.D.

Proposition III.8. — *La droite (CZ) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AZB}$.*



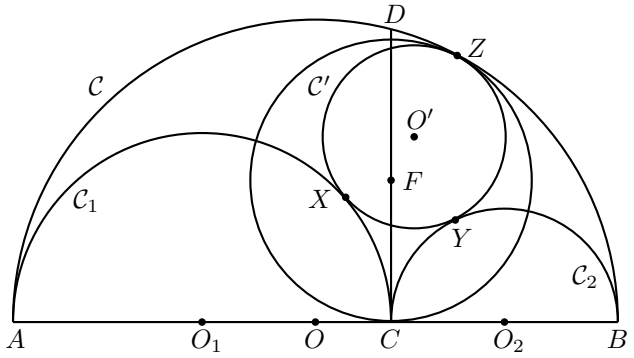
Démonstration
Reprenons les notations de la démonstration de la proposition III.3 et considérons l'inversion i_1 de pôle A et de puissance AD^2.
Z et C ont pour inverses respectifs Z' et B. Donc :

$$\widehat{AZC} = \widehat{ABZ'} = \frac{\pi}{4}$$

AZB étant rectangle en Z, on en déduit que (CZ) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AZB}$.

C.Q.F.D.

Proposition III.9. — *Soit F le point du segment $[CD]$ tel que $CF = 2R$.*
Le cercle de centre F et de rayon $2R$ est tangent à $\mathcal{C}$ en Z.



Démonstration
Montrons l'alignement des points O, F et Z.
Notons $H_{O'}$ la projection orthogonale de O' sur $[AB]$.
On a $CF = 2R = \dfrac{2ab}{a+b}$.

La démonstration de la proposition III.1 fournit :

$$OH_{O'} = a + b - r - \frac{2b}{a}r = \frac{(a-b)(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$$

Par application du théorème de Pythagore au triangle $OH_{O'}O'$ rectangle en $H_{O'}$, on a :

$$O'H_{O'}^2 = O'O^2 - H_{O'}O^2 = (a+b-r)^2 - \frac{(a-b)^2(a+b)^4}{(a^2+ab+b^2)^2} = \frac{4a^2b^2(a+b)^2}{(a^2+ab+b^2)^2}$$

Donc : $O'H_{O'} = \dfrac{2ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.
Il vient : $\dfrac{CF}{CO} = \dfrac{2ab}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{H_{O'}O}{H_{O'}O'}$.
On en déduit l'alignement des points O, F, O' et Z.
Par application du théorème de Pythagore au triangle OCF rectangle en C, il vient :

$$OF^2 = CO^2 + CF^2 = (a-b)^2 + \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2$$

soit : $OF = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.
D'où : $FZ = OZ - OF = a + b - \dfrac{a^2+b^2}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b} = 2R$.
Par suite, le cercle $\mathcal{C}(F, 2R)$ est tangent à $\mathcal{C}$ en Z.

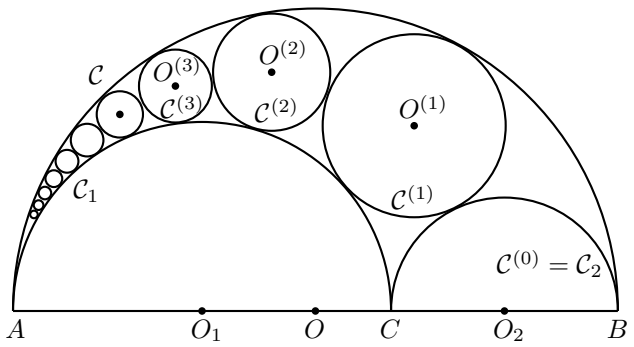
C.Q.F.D.

Remarque III.10. — Le point F a été défini dans la proposition II.5. comme le point d'intersection des droites (CD) et (P_1P_2).
Par ailleurs, le point G de cette même propriété n'est autre que le point Z.

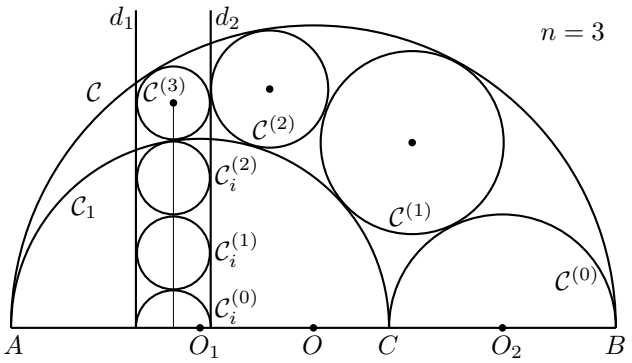
IV. Chaîne de Pappus

Proposition IV.1. — *On pose $\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}_2$. On considère la chaîne de cercles $(\mathcal{C}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{C}^{(n+1)}$ est tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
On note $O^{(n)}$ et r_n le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}^{(n)}$.
Si h_n désigne la distance de $O^{(n)}$ à la droite (AB), alors :

$$h_n = 2nr_n$$



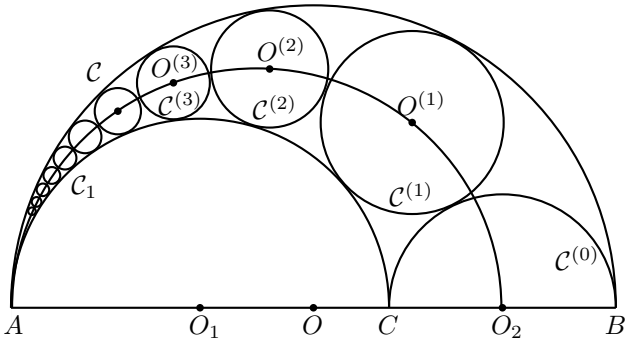
Démonstration
Considérons l'inversion i de pôle A et de puissance μ_n où μ_n est la puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}^{(n)}$.
Le cercle $\mathcal{C}^{(n)}$ est alors invariant par i.
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ ont pour inverses les droites d_1 et d_2 perpendiculaires à (AB) et tangentes à $\mathcal{C}^{(n)}$.
Par suite, pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$, l'inverse $\mathcal{C}_i^{(j)}$ de $\mathcal{C}^{(j)}$ est le cercle tangent à d_1, d_2 et $\mathcal{C}_i^{(j+1)}$.



Il est alors clair que les cercles $\mathcal{C}_i^{(0)}, \mathcal{C}_i^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}_i^{(n-1)}$ et $\mathcal{C}^{(n)}$ ont le même rayon.
Comme le centre de $\mathcal{C}_i^{(0)}$ appartient à la droite (AB), il est immédiat que : $h_n = 2nr_n$.

C.Q.F.D.

Proposition IV.2. — *Les centres $(O^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ des cercles $\mathcal{C}^{(n)}$ appartiennent à une ellipse de foyers O_1 et O_2.*



Démonstration
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$O_1O^{(n)} + OO^{(n)} = (a + r_n) + (a + b - r_n) = 2a + b$$

Ainsi les points $(O^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à une ellipse de foyers O et O_1.

C.Q.F.D.

Proposition IV.3. — *Si $\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a+b}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$r_n = (a+b)\frac{\alpha(1-\alpha)}{n^2(1-\alpha)^2 + \alpha}$$

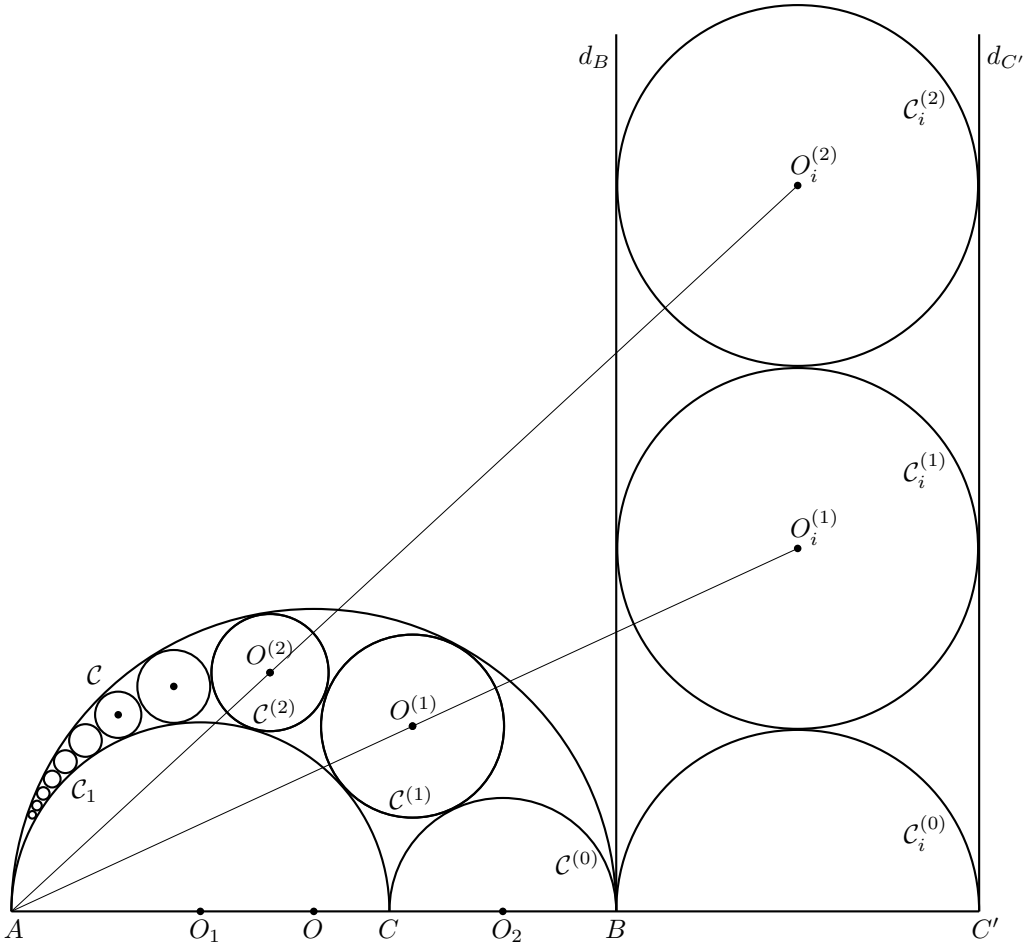
Démonstration
Considérons l'inversion i de pôle A et de puissance AB^2. Le point B est invariant par i. Soit C' l'inverse de C par i.
L'inverse $\mathcal{C}_i^{(0)}$ de $\mathcal{C}^{(0)}$ est le cercle de diamètre $[CB']$.
L'inverse du cercle $\mathcal{C}_1$ est la perpendiculaire $d_{C'}$ à (AB) passant par C' ; l'inverse du cercle $\mathcal{C}$ est la perpendiculaire d_B à (AB) passant par B.
Par suite, l'inverse $\mathcal{C}_i^{(n)}$ du cercle $\mathcal{C}^{(n)}$ est le cercle tangent à $d_B, d_{C'}$ et $\mathcal{C}_i^{(n-1)}$, de sorte que les cercles $\mathcal{C}_i^{(n)}$ ont tous le même rayon.
On a :

$$BC' = AB^2 \times \frac{BC}{AB \times AC} = (2(a+b))^2 \times \frac{2b}{2(a+b)\cdot 2a} = \frac{2b(a+b)}{a}$$

Ainsi, le rayon ρ des cercles $\mathcal{C}_i^{(n)}$ est égal à $\dfrac{BC'}{2} = \dfrac{b(a+b)}{a}$.
Soit $O_i^{(n)}$ le centre du cercle $\mathcal{C}_i^{(n)}$. La puissance μ_n de A par rapport au cercle $\mathcal{C}_i^{(n)}$ est égale à :

$$\mu_n = O_i^{(n)}A^2 - \rho^2 = (2(a+b)+\rho)^2 + (2n\rho)^2 - \rho^2 = 4(a+b)^2 + 4(a+b)\rho + 4n^2\rho^2$$

Or $\mathcal{C}^{(n)}$ est l'image de $\mathcal{C}_i^{(n)}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{AB^2}{\mu_n}$.



On en déduit que le rayon r_n du cercle $\mathcal{C}^{(n)}$ est égal à :

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{AB^2}{\mu_n} \cdot \rho \\
&= \frac{4(a+b)^2\rho}{4(a+b)^2 + 4(a+b)\rho + 4n^2\rho^2} \\
&= (a+b)\frac{ab}{n^2b^2 + a(a+b)} \\
&= (a+b)\frac{\dfrac{ab}{(a+b)^2}}{n^2\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^2 + \dfrac{a}{a+b}} \\
&= (a+b)\frac{\alpha(1-\alpha)}{n^2(1-\alpha)^2 + \alpha}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Corollaire IV.4. — *On a :*

$$h_n = 2n(a+b)\frac{\alpha(1-\alpha)}{n^2(1-\alpha)^2 + \alpha}$$

où $\alpha = \dfrac{a}{a+b}$.

Références

[1] Roger B. Nelsen, Proof Without Words : The Area of an Arbelos p. 144, Mathematics Magazine
[2] Leon Bankoff, Are the Twin Circles of Archimedes really Twins ? pp. 214-218 Vol 47 (1974), Mathematics Magazine, Mathematical Association of America.
[3] H. Okumura and M. Watanabe, The Archimedean Circles of Schoch and Woo pp. 27-34, Forum Geometricorum vol. 4 (2004)
[4] Peter Y. Woo, Simple Constructions of the Incircle of an Arbelos pp. 133-136, Forum Geometricorum Vol.1 (2001)
[5] Peter Y. Woo, http ://www-students.biola.edu/∼woopy/math/arbelos.htm
[6] Alexander Bogomolny, http ://www.cut-the-knot.org/proofs/arbelos.html
[7] Eric Weisstein, http ://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html
[8] Thomas Schoch, http ://www.retas.de/thomas/arbelos/arbelos.html
[9] Jürgen Köller, http ://www.mathematische-basteleien.de/arbelos.htm
[10] Dick Klingens, http ://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm